Classification des matrices orthogonales de taille 3

Mohamed Ait Lhoussain

15 mars 2011

Dans tout ce qui suit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice orthogonal et f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est égale à A . On se propose de classifier les matrices orthogonales de taille 3, c'est-à-dire donner une forme simplifiées de ces matrices dans des bases adaptées.
E est muni de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire que :

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \quad \text{et} \quad y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$$

1 Etude suivant le spectre de f

Le polynôme caractéristique χ_f de f est de degré 3 , précisément de coefficient dominant égal à -1 , Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = -\infty$. Par continuité de χ_f et le théorème des valeurs intermédiaires χ_f possède au moins une racine réelle qui est donc une valeur propre de f. Et comme les valeurs propres possibles d'un automorphisme orthogonal sont 1 et -1 on a trois cas possibles pour $\mathrm{Sp}(f)$ à savoir : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$ ou $\{-1\}$ ou $\{-1, 1\}$. On va étudier A suivant ces trois cas :

1.1 Premier cas : Sp$(A) = \{1\}$

Soit E_1 le sous-espace propre associé à f , nous avons trois possibilités suivant la dimension de E_1.
$\bullet$ Si $\dim E_1 = 3$ alors : $E_1 = E$ donc $f(x) = x$ pour tout $x \in E$ et alors $A = I_3$.
$\bullet$ Si $\dim E_1 = 2$ alors , ${E_1}^{\perp}$ est une droite vectorielle Δ. Comme E_1 est stable par f il en est de même pour Δ. Soit $x \in \Delta$ tel que $x \neq 0$ alors $\Delta = \mathrm{Vect}\{x\}$, comme $f(x) \in \Delta$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et x est un vecteur propre de f et comme 1 est l'unique valeur propre de f on a $\lambda = 1$ et alors $x \in E_1$ or $E_1 \cap \Delta = \{0\}$ on a donc $x = 0$, ce qui est absurde. Ainsi me cas $\dim E_1 = 2$ ne se produit pas.
$\bullet$ Si $\dim E_1 = 1$ alors $(E_1)^{\perp}$ est un plan vectoriel P stable par f. Soit g la restriction de f à P alors g est un endomorphisme orthogonal de P. Soit (u_1, u_2) une base orthonormale de P alors la matrice de g relativement à cette base est $A' = S_\theta$ ou $A' = S_\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Notons que si g admet une valeur propre λ alors il existe un vecteur non nul u de P tel que $g(u) = \lambda u$. En outre λ est aussi valeur propre de f par suite $\lambda = 1$. Si $u \in P \cap E_1 = \{0\}$, ce qui est absurde. Par conséquent g n'admet aucune valeur propre Donc la seule possibilité est d'avoir :

$$A' = R_\theta$$

avec $\theta \neq 0 \quad [\pi]$
En effet, le cas $A' = S_\theta$ est exclu car on sait que S_θ, est diagonalisable. De même les cas $\theta = 0$ ou $\pi \quad [\pi]$ sont exclues car ils correspondent aux rotations ayant des valeurs propres.

Soit en revanche $u_3 = u_1 \wedge u_2$. Alors si $\Omega = (u_1, u_2, u_3)$ alors la matrice de f relativement à Ω est :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

1.2 Deuxième cas : Sp$(A) = \{-1\}$

De la même façon que précédemment :
• si $\dim E_{-1} = 3$ alors $A = -I_3$
• Le cas $\dim E_{-1} = 2$ ne peut pas se produire car la droite $\Delta = (E_{-1})^\perp$ serait stable et comprendrait un vecteur propre qui serait aussi dans E_{-1} ce qui est impossible.
• Si $\dim E_{-1} = 1$ alors comme dans le cas précédent $(E_{-1})^\perp = P$ est un plan stable par f et si g est la restriction de f à P alors g est un automorphisme orthogonal de P sans valeur propre et on trouve que dans une base orthonormale (u_1, u_2) de P , la matrice de g est R_θ avec $\theta \neq 0 \quad [\pi]$ et si $u_3 = u_1 \wedge u_2$ et $\Omega = (u_1, u_2, u_3)$ alors la matrice de f dans Ω est :

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$

Remarquons que : $B_\theta B_0 = R'_\theta$ et que $(B_0)^{-1} = {}^tB_0 = B_0$ donc $B_\theta = R'_\theta B_0$

1.3 Troisième cas : Sp$(A) = \{-1, 1\}$

Les sous espaces propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux car si $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$ alors : $f(x) = x$ et $f(y) = -y$. Comme f est un automorphisme orthogonal, f conserve le produit scalaire et on a :

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$$

et alors $\langle x, y\rangle = 0$
Si E_1 et E_{-1} sont deux droites vectorielles alors le plan $E_1 \oplus E_{-1}$ est stable par f donc la droite $P^\perp$ est stable par f. Soit x un vecteur non nul de $P^\perp$ alors x est un vecteur propre de f donc x est dans E_1 ou E_{-1} donc $x = 0$ ce qui est absurde. Ainsi les cas possibles sont :
•• E_1 est un plan et $E_{-1} = E_1^\perp$ est une droite vectoriel et si (u_1, u_2) est une base orthonormale de E_1 et $u_3 = u_1 \wedge u_2$ alors la matrice de f dans la base orthonormale $\Omega = (u_1, u_2, u_3)$ est :

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

•• E_{-1} est un plan et $E_1 = {E_{-1}}^\perp$ est une droite vectoriel et si (u_1, u_2) est une base orthonormale de E_{-1} et $u_3 = u_1 \wedge u_2$ alors la matrice de f dans la base orthonormale $\Omega = (u_1, u_2, u_3)$ est :

$$R'_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Definitions et classification

2.1 Définitions, analyse de l'étude précédente

La matrice R'_θ ci-dessus s'appelle matrice de rotation et dans ce cas on dit que f est la rotation d'axe dirigé par $E_1 = \text{Vect}\{u_3\}$ et d'angle θ .
La matrice B_0 s'appelle matrice de réflexion orthogonale par rapport au plan $E_1 = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$
Avec ces définitions l'étude précédente nous a conduit à la classification suivante :
- Si 1 est l'unique valeur propre de A alors A est semblable à une matrice de rotation.
- Si -1 est l'unique valeur propre de A alors A est semblable au produit d'une matrice de rotation est d'une matrice de réflexion orthogonale
-Si -1 et 1 sont valeurs propres de A alors A est semblable à une matrice de rotation d'angle π (on dit retournement) ou une matrice de réflexion
Notons que toutes les similitudes citées ci-dessus sont via une matrice orthogonale .

2.2 Résumé

On conclut qu'une matrice orthogonale de taille 3 est soit une matrice de rotation ,soit une matrice de réflexion soit un produit des deux.
Remarquons que d'près l'étude précédente, une matrice de rotation est une matrice orthogonale directe et les matrices de réflexion ou composé d'une réflexion et une rotation sont des matrices orthogonales indirectes.