**SERIES DE FOURIER**

# I) Fonction de classe $C^1$ par morceaux sur un segment

1.une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite de classe $C^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < ... < a_n = b$ tel que $f$ est prolongeable sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ en une fonction de classe $C^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
2. Soit $T > 0$ et $f$ une fonction $T-$ périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$. On dit que $f$ est de classe $C^1$ par morceaux si sa restriction à tout intervalle $[a, a + T]$ avec $a \in \mathbb{R}$ est de classe $C^1$ par morceax.Ceci revient à dire que $f$ est $C1$ par morceaux sur $[0, T]$.

# II) Coefficients de Fourier d'une fonction $\mathcal{CM}$ et $T-$périodique, Somme partielle de la série de Fourier de $f$

Dans tout ce qui suit $T$ est un nombre réel strictement positif et $\mathcal{CM}_T$ le $\mathbb{K}-$ espace vectoriel des fonctions $T-$ périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
1. Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. On considère les suites $(a_n(f)), (b_n(f))$ et $(c_n(f))$ définies par :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt$$

1. $a_n(f)$ et $b_n(f)$ s'appellent les coefficients de Fourier de $f$ sous forme trigonométrique et $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de $f$ sous forme exponentielle.
2. On a les relations suivantes entre ces coefficients :

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ \\ \forall n > 0 \quad c_n(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \end{cases}$$

3. On appelle somme partielle d'ordre $n$ de la série de Fourier de $f$ la fonction $S_n(f)$ définie par :
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{cases} S_n(f)(t) = a_0(f) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(k\omega t) + b_k(f)\sin(k\omega t)) \quad \text{si} \quad n \neq 0 \\ \\ S_0(f)(t) = a_0(f) \end{cases}$$

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n(f)(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik\omega t}$

## III) Théorèmes

### 1) Théorème de Parseval

**Théorème :** Soit $f \in \mathcal{CM}_T$. Alors les series numériques $\sum |a_n(f)|^2, \sum |b_n(f)|^2$ et $\sum (|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2)$ (avec $n \geq 1$ ) sont convergentes et on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int |f(t)|^2 dt &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \\ &= |a_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_{-n}(f)|^2 + |c_n(f)|^2) \end{aligned}$$

### 2) Théorème de Dirichlet

**Théorème :** Soit $f \in \mathcal{CM}_T$ de classe $C^1$ par morceaux. Alors Pour tout $t \in \mathbb{R}$ , la suite $(S_n(f)(t))_n$ est convergente de limite : $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ avec $f(t+0)$ et $f(t-0)$ les limites de $f$ en $t$ à droite et à gauche respectivement. Si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors on a ce qui suit :

1. $\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = f(t)$
2. les séries : $\sum |a_n(f)|, \sum |b_n(f)|$ et $\sum (|c_{-n}(f)| + |c_n(f)|)$ sont convergentes.
3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ , l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ s'obtient en intégrant terme à terme la série de Fourier de $f$

## IV) Cas de $\mathcal{C}_T$ :

Dans tout ce qui suit, on prends $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que toutes les fonctions seront à valeurs réelles. $\mathcal{C}_T$ désignera le sous espace vectoriel de $\mathcal{CM}_T$ constitué des fonctions continues.

### 1) Un espace préhilbertien

1. On pose pour tout $f, g \in \mathcal{C}_T$ :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$$

cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T$
2. La famille $(t \mapsto \cos n\omega t)_{n\geq 0}, (t \mapsto \sin(n\omega t))_{n\geq 1})$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}_T$

### Quelques interpretations

1. $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de $f$ sur $F_n = \mathrm{Vect}\{C_0, C_1, S_1, ..., C_n, S_n\}$ avec $C_k(t) = \cos(k\omega t)$ et $S_k(t) = \sin(k\omega t)$

2. Inégalité de Bessel : Puisque la famille $\mathcal{F}_n$ est orthogonale et puisque :

$$S_n(f) = |a_0(f)|^2||C_0||^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)C_k + \sum_{k=1}^{n} S_k(f)$$

On a alors :

$$||S_n(f)||^2 = \sum_{k=0}^{n} |a_k(f)|^2||C_k||^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k(f)|^2||S_k||^2$$

Or le calcule donne pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$||C_k||^2 = ||S_k||^2 = \frac{1}{2}$$

et

$$||C_0||^2 = 1$$

d'où :

$$||S_n(f)||^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)$$

Ce qui veut dire :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |S_n(f)(t)|^2 dt = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2)$$

Compte tenu du théorème de Parseval, on a :

$$||S_n(f)||^2 \leq ||f||^2$$

mais cette inégalité est un résultat immédiat du fait que $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de $f$ sur $F_n$