Série n° 3

Intégration des fonctions CPM sur un intervalle quelconque

Exercices de révision :

Exo1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ **2)** $I=\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ **3)** $I=\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+x+1}dx$

Exo2 : Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1) $I=\int_1^e x(\ln x)^2dx$ **2)** $I=\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,dx$ **3)** $I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

Exo3 : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)dt$.

1. Comparer I_n et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt$.
2. Chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2} ; En déduire I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n .
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_nI_{n-1}$.
4. Démontrer que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de I_n

---

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{\frac{1}{2}}^3 t^{-E(\frac{1}{t})-1}dt$ **2)** $\int_1^2 t^{E(t^2)}dt$ **3)** $\int_1^3 \sqrt{t+(-1)^{E(t)}}\,dt$, $E(t)$ désigne la partie entière de t .

Exercice 2 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes :

1) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln t}dt$ **2)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\tan t}dt$ **3)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}dt$ **4)** $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{\sqrt{t}}dt$

5) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t(1+t^2)}dt$ **6)** $\int_1^{+\infty}e^{-t^2}dt$

Exercice 3 : Montrer que, pour tout $n\geq 1$, l'intégrale $I_n=\int_0^1 |\ln x|^n dx$ est convergente, puis calculer I_n en fonction de n .

<u>Exercice 4</u> : Soit $\alpha > 0$ et $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$ où $n \in \mathbb{N}$. Etudier la nature puis calculer l'intégrale I_n.

<u>Exercice 5</u> : Intégrales semi-convergentes :

1. Etudier la convergence des intégrales : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.
2. Etudier la convergence des intégrales : $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t} dt$.

<u>Exercice 6</u> : Soit $\alpha > 0$. Préciser pour quelles valeurs de α, l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

<u>Exercice 7</u> : Soient $\alpha > 0$, $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ et $J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.

1. Discuter, selon α, la nature des intégrales $I(\alpha)$ *et* $J(\alpha)$.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$.

<u>Exercice 8</u> : Soit $\alpha > 0$. Discuter, selon α, la nature des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{x^\alpha})\, dx$ **2)** $\int_1^2 \ln(1-\frac{1}{x^\alpha})\, dx$ **3)** $\int_2^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^\alpha})\, dx$

<u>Exercice 9</u> : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $I(\alpha,\beta) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$.

Discuter, selon α et β, la nature de l'intégrale $I(\alpha,\beta)$.

<u>Exercice 10</u> : Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$

1. Montrer que les intégrales I et J sont convergentes. Montrer que $I = J$.
2. Montrer que $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2t) dt - \frac{\pi}{2} \ln 2.$
3. Trouver une relation entre $I + J$ et I. (autre que $I + J = 2I$).
4. En déduire la valeur de de I et de J.

<u>Exercice 11</u> : Existence et calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

<u>Exercice 12</u> : Existence et calcul de l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(t-1)(2-t)}} dt$.

Exercice 13 : On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n} dx$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. A l'aide du changement de variable $x = \frac{1}{u}$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$; Puis à l'aide du changement de variable $t = u - \frac{1}{u}$, calculer I_1.
3. Calculer alors I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sous forme d'un produit.

Exercice 14 : Existence et calcul de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\, dx$.

Exercice 15 :

1. Montrer que, $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[: \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, et tout réel t de $\left]0,\sqrt{n}\right[$ un majorant de $\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)$ puis de $\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) En effectuant le changement de variable $t = \frac{\sqrt{n}}{\tan u}$, montrer que :
   $$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_a^b f_n(\sin u)du$$ où a,b et f_n sont à déterminer.
   b) A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\cos u$, montrer que :
   $$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} dt = \int_a^b g_n(\sin u)du$$ où g_n est une fonction à déterminer.
   c) Déduire des résultats précédents que :
   $$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)du \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(u)du$$
6. <u>En utilisant</u> l'équivalence, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^N(u)du \underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$, déduire la valeur des intégrales
   $$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ , } J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ et } K = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ .}$$

Fin