Série n° 1

Notions élémentaires de topologie de $\mathbb{R}^d$

Exercice 1 :

l'application $N:(x,y)\mapsto|5x-2y|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y)=\max(|x+y|,|x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

Exercice 3 :

Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y)=\max(|x|,|y|,|x-y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité ouverte.

Exercice 4 :

Pour quelles valeurs du nombre réel λ la relation : $N_\lambda(u)=\sqrt{x^2+2\lambda xy+y^2}$, pour $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, définie-elle une norme N_λ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

Montrer que $N:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, définie pour $u=(x,y)$ par : $N(u)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x+ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 :

Soit N une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$. Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un nombre réel strictement positif α tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ N(x)=\alpha|x|.$$

Exercice 7:

Soit N_1,N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^d$, B_1 et B_2 leurs boules unités fermées.

Montrer que $B_1\subset B_2\Leftrightarrow N_2\le N_1$.

Exercice 8 :

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y)=\max(\sqrt{x^2+y^2},|x-y|)$ et $N_2(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $N_2\le\|.\|_\infty\le\|.\|_2\le N_1\le 4N_2$
3. Dessiner les boules unités fermées de N_1 et N_2.

Exercice 9:

1. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}^d$ alors N_1+N_2 est une norme sur $\mathbb{R}^d$ .Généraliser.
2. Montrer que si N est une norme sur $\mathbb{R}^d$ et si $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ alors λN est une norme sur $\mathbb{R}^d$.
3. Dessiner en le justifiant la boule ouverte unité associée à la norme $N=\|.\|_1+\|.\|_\infty$

Exercice 10 :

Montrer que, dans $\mathbb{R}^2$, la partie A est ouverte dans les cas suivants :

1. $A =]0,1[\times]0,4[$.
2. $A = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x > 3\}$.
3. $A = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 11:

1. Montrer que les parties suivantes sont des ouverts de $\mathbb{R}$: $]-\infty, 2[$, $]0,1[\cup]3,+\infty[$.
2. Montrer que l'intervalle $]0,1]$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $A = \left\{\dfrac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $C = \{(t, \sin t) / t \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 :

Les parties suivantes sont-elles bornées ?

$$A = \{x \sin x / x \in \mathbb{R}\} , \ B = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 = 1\} \text{ et } C = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\} .$$

Exercice 13 :

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ et soit A un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.

1. Montrer que si A un ouvert, alors $A = \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.
2. Montrer que s'il existe $a \in A$ et $r > 0$ telque $B(a,r) \subset A$, alors $A = \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.

Exercice 14 :

Pour toute partie A de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A .

1. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, on a :
   - **a)** $\overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.
   - **b)** $A \subset \overline{A}$.
2. Montrer que si A et B sont des parties de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ alors on a : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
3. On suppose dans cette question que $\mathrm{d} = 1$ et soit $A = [0,1]$ et $B =]0,1]$. Comparer $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
   Qu'en déduisez-vous pour l'implication réciproque de la question **2.** ?
4. Montrer que pour toute partie F de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, on a : F est fermée si et seulement si $F = \overline{F}$.
   En déduire que pour toute partie A de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, on a : $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Exercice 15 :

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et de même rayon.

Fin