# Série n° 21

## Calcul matriciel, systèmes linéaires

**Exercice 1**

1) Donner la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ :
   - a) $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$
   - b) $g(x,y,z)=(x-2y-z,4x-4y)$
   - c) $h(x,y,z)=(6y-2z,-2x,x+y-z)$
2) Donner la matrice de $\varphi=f\circ g\circ h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dans les bases canoniques. Donner l'expression de $\varphi$.

**Exercice 2** Montrer que la famille $(\sin,\cos,\exp)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $E=Vect(\sin,\cos,\exp)$.
Montrer que $\psi:f\in E\mapsto f'$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer sa matrice dans la base ci-dessus.

**Exercice 3** Ecrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases proposées :

1) $f:\begin{cases}\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]\\ P\mapsto P'\end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer $A^2,A^3,A^4$ et interpréter.
2) $g:\begin{cases}\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_2[X]\\ P\mapsto (X^2+1)P''\end{cases}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $Ker\,g$, $\operatorname{Im}g$ et $rg(g)$.

**Exercice 4** Calculer, si cela est possible, le produit $AB$ et $BA$ dans les cas suivants :

a) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&0\\3&2\end{pmatrix}$  b) $A=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2&5&0\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}5&-2\\1&0\\4&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&5\\4&3\end{pmatrix}$  d) $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&1\\4&2&5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-3\\0&-1\end{pmatrix}$

**Exercice 5** Soient $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Calculer $T^2$ et $T^3$ et en déduire $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

**Exercice 6** Soit $F=\left\{M=\begin{pmatrix}a+b&-b\\b&a\end{pmatrix}/a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

Montrer que $F$ est un s.e.v.de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et déterminer une base de $F$.

**Exercice 7** Soit $H=\left\{M=\begin{pmatrix}a&-c&-b\\b&a&-c\\c&b&a\end{pmatrix}/\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que pour tout $M,N\in H$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $MN\in H$ et $M+\lambda N\in H$.
2) En déduire que $(H,+,\times)$ est un sous anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**Exercice 8** Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$, et $f$ l'endomorphisme associée à $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer $Ker f$ et $rg f$ , puis donner une base de $\mathrm{Im} f$ .

**Exercice 9** Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2$, puis montrer que $A^2=3A-2I_3$.
2) En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$ .

**Exercice 10** Déterminer, si elle existe, l'inverse $A^{-1}$ de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$

**Exercice 11** Soient $A=\begin{pmatrix}2&2/3\\-5/2&-2/3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}-2&-2\\3&5\end{pmatrix}$.

1) Calculer $P^{-1}$ et $D=P^{-1}AP$ .
2) Calculer $D^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. En déduire $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

**Exercice 12** Soit $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\-2&0&-1\end{pmatrix}$, et $f$ l'endomorphisme associée à $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $Ker f$ est de dimension 1 et $Ker(f-id)$ est de dimension 2.
2) Soient $(u_1)$ une base de $Ker f$ et $(u_2,u_3)$ une base de $Ker(f-id)$ .
   a) Montrer que $B'=(u_1,u_2,u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Donner la matrice de $f$ dans la base $B'$.
   c) En déduire $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

**Exercice 13** Soit $A=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&1&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$, et $f$ l'endomorphisme associée à $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que $f$ est une symétrie dont on précisera les éléments caractéristiques.

**Exercice 14** La matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un nombre entier $r>0$ tel que $A^r=0$ .

1) Montrer que si $A$ est nilpotente, $A$ n'est pas inversible, mais $I_n-A$ est inversible. Calculer $(I_n-A)^{-1}$
2) Soit $M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ . Montrer que $M$ est inversible et calculer $M^{-1}$

**Exercice 15**

**1)** Soient $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&8\\3&9&27\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}3&-3/2&1/3\\-5/2&2&-1/2\\1/2&-1/2&1/6\end{pmatrix}$. Calculer $N.A$

**2) a)** soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}12\\4\\6\end{pmatrix}$. Expliciter l'équation $AX=B$.

**b)** En déduire la résolution du système $(S):\begin{cases}x+y+z=12\\2x+4y+8z=4\\3x+9y+27z=6\end{cases}$

**Exercice 16** Calculer le rang des matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1&1\\-4&1&\lambda\\-4&4&-4\\6&4&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\\lambda&1&1&1\\1&-1&3&-3\\4&2&0&\lambda\end{pmatrix}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$

**Exercice 17** Déterminer le rang du système $(S)$ ainsi que la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée :

**a)** $(S):\begin{cases}x+2y-z=0\\3x-4y+3z=0\\3x+y=0\end{cases}$ **b)** $(S):\begin{cases}x+2y+z=1\\2x+4y+3z=3\\4x+8y-z=-1\end{cases}$

**Exercice 18** Résoudre les systèmes suivants :

**a)** $(S):\begin{cases}x-2y-2z=1\\-2x+y-2z=-8\\-2x-2y+z=-5\end{cases}$ **b)** $(S):\begin{cases}x+iy-z=-1\\ix+2y+z=1+3i\\x-y-z=-i\end{cases}$ **c)** $(S):\begin{cases}3x+4y+z+2t=3\\6x+8y+2z+5t=7\\9x+12y+3z+10t=13\end{cases}$

**Exercice 19** Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$, On considère le système $(S):\begin{cases}x+y+z=1\\ax+by+cz=d\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2\end{cases}$

**1)** Calculer, sous forme factorisée, le déterminant de la matrice du système.

**2)** Montrer que $(S)$ est un système de Cramer si et seulement si $a,b$ et $c$ sont distincts deux à deux.

**3)** En déduire dans ce cas l'ensemble des solutions du système $(S)$.

**Exercice 20** Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, On considère le système $(S):\begin{cases}x+y+z=a\\x+jy+j^2z=b\\x+j^2y+jz=c\end{cases}$

Montrer que ce système est de **Cramer**, puis en déterminer l'unique solution $(x,y,z)$.

**Exercice 21** Calculer les déterminants suivants sous la forme la plus factorisée possible :

**a)** $D=\begin{vmatrix}x+1&1&1\\2&x+2&2\\3&3&x+3\end{vmatrix}$ **b)** $D=\begin{vmatrix}1-x&2-x&3-x\\2-x&3-x&4-x\\3-x&4-x&5-x\end{vmatrix}$ **c)** $D=\begin{vmatrix}a-b-c&2b&2c\\2a&b-c-a&2c\\2a&2b&c-a-b\end{vmatrix}$

**Exercice 22** **Déterminant de Vandermonde**

On pose $V(a,b,c)=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$, $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & \cos a & \cos 2a\\ 1 & \cos b & \cos 2b\\ 1 & \cos c & \cos 2c\end{vmatrix}$ et $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2a+1 & 3a^2+4a\\ 1 & 2b+1 & 3b^2+4b\\ 1 & 2c+1 & 3c^2+4c\end{vmatrix}$

1) Montrer que : $V(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)$.
2) En déduire les valeurs de $\Delta_1$ et $\Delta_2$.

**Exercice 23** Après avoir remarquer que : 156, 260 et 360 sont divisibles par 13, et que : 312, 256 et 560 sont divisibles par 8, montrer que le déterminant suivant est divisible par $13 \times 8$ sans le calculer :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 5 & 6\\ 2 & 6 & 0\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}$$

**Exercice 24** Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel $m$ les systèmes suivants :

**a)** $(S):\begin{cases} x-y+2z=1\\ -y+z=0\\ x+z=m\end{cases}$ **b)** $(S):\begin{cases} mx+y+z=m\\ x+my+z=m\\ x+y+mz=m\end{cases}$

**Exercice 25** Soit $f\in L(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $f:P\mapsto P-XP'$. Soit $B=\left\{1,X,X^2\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $B'=\left\{X-1, X+X^2, 1-X+X^2\right\}$.

1) $f$ est-elle bijective ?
2) Vérifier que $B'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, puis calculer $\det(\mathcal{M}_{B'}(f))$.
3) Déterminer $\mathcal{M}_{B'}(f)$.

**Exercice 26**

Montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f\circ f=-Id_{\mathbb{R}^3}$.

Donner un exemple si on remplace $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^2$ (on donnera la matrice et la nature de cet endomorphisme).

**Fin**