Série n° 20

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1 Déterminer $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ pour que le polynôme $P=X^4+\lambda X^3+\mu X^2+2X+1$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

Exercice 2 Soit $n\in\mathbb{N}$, développer de deux manières différentes le polynôme $P=(1+X)^{2n}(1-X)^{2n}$

Préciser le coefficient du terme de degré $2n$, et simplifier la somme : $S_n=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(C_{2n}^k\right)^2$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation : $P+(X-1)P'-XP''=0$.

Exercice 4 Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que :

1) $P_n-P_n'=X^n$.
2) $P_n+P_n'=\dfrac{X^n}{n!}$.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}[X]$, effectuer la division euclidienne de P par Q dans les cas suivants :

1) $P=3X^4-5X^2-2X+9$ et $Q=X-1$.
2) $P=X^5-X^3+X-2$ et $Q=X^2-2X+4$.

Exercice 6 Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer la division euclidienne de P par Q dans les cas suivants :

1) $P=X^2-3iX-5(1+i)$ et $Q=X-1+i$.
2) $P=(1+i)X^3-(2-i)X^2+6X-5$ et $Q=X^2+2iX+3-i$.

Exercice 7 Soit $P=X^{100}-5X+1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par Q :

1) $Q=X-1$ **2)** $Q=X+1$ **3)** $Q=X^2-1$

Exercice 8 On considère les deux polynômes : $P=X^4-X+b$ et $Q=X^2-bX+1$.
Déterminer le réel b positif pour que P soit divisible par Q.

Exercice 9 On considère les deux polynômes : $A=X^{n+1}-X^n-X+1$ et $B=(X-1)^2$ où $n\in\mathbb{N}^*$.
Montrer que A est divisible par B.

Exercice 10 Déterminer un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré 4 tel que :
$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=5$ et $P(0)=29$

Exercice 11 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(0)=0,\ P(1)=1,\ P'(0)=1,\ P'(1)=0.$

Exercice 12 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

1) $(X-1)^2 \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right)^2 - n^2 X^{n-1}\right.$ **2)** $(X-1)^3 \left| nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n\right.$.

Exercice 13 Montrer que le polynôme $P=1+\frac{X}{1!}+\frac{X^2}{2!}+\cdots+\frac{X^n}{n!}$ possède, dans $\mathbb{C}$, n racines deux à deux distincts.

Exercice 14 Soit $P=aX^4+bX^3+cX^2-7X-3$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$..
Déterminer les réels a,b et c tels que le polynôme P admette -1 comme racine multiple d'ordre 3.
En déduire une factorisation de P dans ce cas.

Exercice 15 Déterminer le nombre réel a de telle sorte que le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ définit par :
$P=X^4+4X+a$ admette une racine double. Puis factoriser P .

Exercice 16 Déterminer les nombres réels non nuls a,b de telle sorte que le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ définit par $P=X^5-10X^3+aX^2+b$ admette une racine de multiplicité 3.

Exercice 17 x_1, x_2 et x_3 étant les racines non nulles de $X^3+aX^2+bX+c=0$. où $a,b,c \in \mathbb{C}$.
Calculer en fonction de a,b et c : $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2$, $T=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ et $R=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}$

Exercice 18 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1) $F=\frac{X+2}{(X-1)(X-3)(X-5)}$ **2)** $F=\frac{X+7}{(X^3-X)(X^2-4)}$ **3)** $F=\frac{X^2+X+1}{(X-2)^3}$

4) $F=\frac{X^3+2}{(X+1)^5}$ **5)** $F=\frac{4X^4-10X^3+8X^2-4X+1}{X^3(X-1)^2}$ **6)** $F=\frac{X^3+2}{(X+1)^2(X-1)^5}$

Exercice 19 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :

1) $F=\frac{X+i}{X^2+i}$ **2)** $F=\frac{X^2+1}{X^4-1}$ **3)** $F=\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$

4) $F=\frac{X}{(X+i)^3}$ **5)** $F=\frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}$ **6)** $F=\frac{X^4-2}{X^3(X+i)^2}$

Exercice 20 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1) $F=\frac{2X^4+X^3+3X^2-6X+1}{2X^3-X^2}$ **2)** $F=\frac{X^5-2X^4+3X+1}{X^3(X-1)^2}$

FIN