Série n°19

Espace vectoriel de dimension finie

Exercice 1 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, le vecteur $v=(11,1,6,-3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u_1=(2,-1,3,1)$, $u_2=(-1,3,0,2)$ et $u_3=(2,2,0,-1)$

Exercice 2 Soient $X=(1,4,1)$, $Y=(3,2,-3)$, $Z=(0,5,3)$ et $T=(1,-6,-5)$.

Montrer que $vect(\{X,Y\})=vect(\{Z,T\})$.

Exercice 3 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les familles suivantes :

1) $\{u_1=(1,-2,3); u_2=(2,0,-1); u_3=(2,1,0); u_4=(-2,1,-2)\}$.
2) $\{u_1=(3,0,5); u_2=(-1,1,1); u_3=(2,0,-1)\}$.
3) $\{u_1=(-2,5,1); u_2=(2,0,1); u_3=(2,5,3)\}$.

Sont-elles libres ? Génératrices ? Bases de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les familles suivantes sont-elles libres ?

1) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \sin x\}$.
2) $\{f_1 : x \mapsto x+1, f_2 : x \mapsto x^2-1, f_3 : x \mapsto 2x^2-3x\}$
3) $\{f_1 : x \mapsto 1, f_2 : x \mapsto e^x, f_3 : x \mapsto xe^{2x}\}$
4) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \cos 2x, f_3 : x \mapsto \cos 3x, f_4 : x \mapsto \cos 4x\}$
5) $\{f_1 : x \mapsto \cos x, f_2 : x \mapsto \cos(x+1), f_3 : x \mapsto \cos(x+2)\}$.

Exercice 5 la famille suivante $\{u_1=(1+i,1-3i); u_2=(3+i,-1-7i)\}$ est-elle libre dans $\mathbb{C}^2$?, considéré comme un $\mathbb{R}$–espace vectoriel puis, comme un $\mathbb{C}$–espace vectoriel.

Exercice 6

Soit $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $(1,j)$ est une base de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$–espace vectoriel.

Exercice 7 Vérifier que la famille $\mathcal{F}=\{u_1=(1,-1,i); u_2=(-i,1,-1); u_3=(1,i,-1)\}$ est une base du $\mathbb{C}$-e.v $\mathbb{C}^3$. Calculer les coordonnées de $v=(1,2-i,-4+i)$ dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 8 Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $\mathcal{F}=\{u,v,w\}$ une famille libre de vecteurs de E.

Montrer que la famille $\mathcal{F}'=\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ est libre aussi.

Exercice 9 Calculer la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :
$u_1=(0,1,2,3)$, $u_2=(1,2,3,4)$ *et* $u_3=(2,3,4,5)$.

Exercice 10 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soient : $u=(1,-1,0), v=(2,0,-1)$ et $w=(1,1,1)$, soit $F=vect(u,v)$ et $G=vect(w)$. Déterminer $F\cap G$ et $F+G$.

Exercice 11 Donner la dimension du sous-espace F de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par la famille :
$\left\{f_1: x\mapsto \sin 2x \,,\, f_2: x\mapsto \cos 2x \,,\, f_3: x\mapsto \cos^2 x \,,\, f_4: x\mapsto \sin^2 x\right\}$

Exercice 12 Soient E un $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie n, F et G deux s.e.v. de E tels que : $\dim F+\dim G>n$. Montrer que $F\cap G\neq\{0\}$.

Exercice 13 Soient E un $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie n ,$(n\geq 2)$, H_1 et H_2 deux hyperplans de E , distincts. (Par définition : un **hyperplan** est un s.e.v.de E de dimension $n-1$). Montrer que $\dim(H_1\cap H_2)=n-2$.

Exercice 14 Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z)=(x-z, x+y+z, 2x+y)$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $Ker f$, puis une base de $Ker f$.
3) Déterminer $\operatorname{Im} f$, puis une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 15 Soient E un $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie, $\lambda\in\mathbb{K}$,$f\in L(E)$. Calculer $rg(\lambda f)$en fonction de $rg(f)$

Exercice 16 Soient E un $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie n ,$f\in L(E)$ tel que : $f^n=0$ et $f^{n-1}\neq 0$.

Montrer que , s'il existe $x\in E$ tel que $f^{n-1}(x)\neq 0_E$, alors la famille $(x, f(x), f^2(x),\ldots,f^{n-1}(x))$ est libre. En déduire que $rg(f)=n-1$.

Exercice 17 Soient E un $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie, $f\in L(E)$.

Montrer que : $\dim(Ker(f^2))\leq 2\dim(Ker(f))$.

Exercice 18 Soient E un $\mathbb{K}-$e.v de dimension finie, $f,g\in L(E)$ tels que : $f+g=Id_E$ et $rg(f)+rg(g)\leq\dim(E)$. Montrer que

1) $E=\operatorname{Im}(f)\oplus\operatorname{Im}(g)$.
2) f et g sont des projecteurs.

Fin