Série n°18

Espaces vectoriels, application linéaires

Exercice 1 les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3,+,\bullet)$?

1) $F_1=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y-z=0\right\}$ **2)** $F_2=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-z+1=0\right\}$

3) $F_3=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y=0\ et\ y+z=0\right\}$ **4)** $F_4=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2-y-z=0\right\}$

5) $F_5=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ xyz=0\right\}$ **6)** $F_6=\left\{(a+b,2a,b-a)\in\mathbb{R}^3,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 2 les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\bullet)$?

1) L'ensemble des fonctions continues. **2)** L'ensemble des fonctions dérivables.
3) L'ensemble des fonctions croissantes. **4)** L'ensemble des fonctions T-périodiques.
5) L'ensemble des fonctions de classe C^k. **6)** L'ensemble des fonctions à valeurs entières.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer sur un contre-exemple que $F\cup G$ n'est en général pas un sous-espace vectoriel.
2) On suppose que $F\not\subset G$ et que $G\not\subset F$. Trouver $x\in F$ et $y\in G$ tels que $x+y\notin F\cup G$.
3) En déduire que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Exercice 4 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E et $x_0\in E-\{0\}$.
On note $\mathbb{K}x_0=\{\lambda x_0,\lambda\in\mathbb{K}\}$. Montrer que : $F+\mathbb{K}x_0$ est directe ssi $x_0\notin F$.

Exercice 5 Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ L'ensemble des fonctions réelles.
Soient les ensembles : $F_1=\{f\in E\ /\ f\ \text{paire}\}$, $F_2=\{f\in E\ /\ f\ \text{impaire}\}$

1) Montrer que les ensembles $F_1\ et\ F_2$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que $F_1\ et\ F_2$ sont supplémentaires.

Exercice 6 Montrer que les ensembles $A=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0)=0\right\}$ et $B=\left\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}},f\ \text{est constante}\right\}$ sont supplémentaires.

Exercice 7 Montrer que les sous-ensembles suivants :
$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x-2y=0\right\}$ et $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,y-z+2t=0\right\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.sont-ils supplémentaires ?

Exercice 8 Soient $E=\mathbb{R}^4$, On pose :
$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=0,z+t=0\right\}$ et $G=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,x=y,z=t\right\}$.
Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires.

Exercice 9 les applications suivantes sont-elles linéaires ? Donner leur image et leur noyau le cas échéant :

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x-y$
2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(3x-2y,3y,-x-y)$
3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(2x+3,y+z,0)$
4) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R},\ z\mapsto\mathrm{Re}(z)$

Exercice 10 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, (x,y)\mapsto(x,2x+y,y)$ et $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, (x,y,z)\mapsto(x+y,5x-2y+z)$.

1) Montrer que f *et* g sont linéaires, et déterminer leur noyau et image.

2) Montrer que gof est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\mapsto(x+2y-z,-y+z,2x-y+3z)$. Déterminer $Ker f$ et résoudre l'équation linéaire $f(u)=b$, où $b=(3,-1,1)$.

Exercice 12 Soient $E=C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\varphi:E\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f\mapsto f'$.

Montrer que φ est une application linéaire. Chercher son noyau et son image.

Exercice 13 Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\varphi:\begin{array}{l}E\to E\\ f\mapsto g\end{array}$ où $g:x\mapsto\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$

Montrer que φ est un endomorphisme de E , déterminer son noyau et son image.

Exercice 14 Soit $f\in L(E)$ tel que $f^2-f-2id_E=0$

1) Montrer que $f\in GL(E)$ et que $(f+id_E)o(f-2id_E)=0$

2) Montrer que $Ker(f+id_E)\oplus Ker(f-2id_E)=E$

Exercice 15 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E . Montrer les équivalences :

1) $E=\operatorname{Im} f+Ker f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$

2) $\operatorname{Im} f\cap Ker f=\{0_E\}\Leftrightarrow Ker f=Ker f^2$

Exercice 16 Soit $f,g\in L(E)$ tels que $fog=gof$. Montrer que $f(Ker\, g)\subset Ker\, g$ et $f(\operatorname{Im} g)\subset\operatorname{Im} g$.

Exercice 17 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f,g)\in L(E)^2$ tels que $fogof=f$. Montrer que :

1) $Ker f+\operatorname{Im} g=E$ 2) $\operatorname{Im} f\cap Ker\, g=\{0_E\}$.

Exercice 18 Soit $E=\mathbb{R}^3, F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y-z=0\right\}$ *et* $G=\left\{(x,x,0)\in\mathbb{R}^3, x\in\mathbb{R}\right\}$

1) Montrer que F *et* G sont des sous-espaces supplémentaires de E .

2) Déterminer l'expression analytique de p : le projecteur sur F parallèlement à G .

Exercice 19 Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ pour que l'application suivante : $\begin{array}{llll}f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & (x,y) & \mapsto & (ax+by,cx+dy)\end{array}$ soit un projecteur.

Exercice 20 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, (x,y)\mapsto(3x-y,-x+3y)$.

1) Montrer que $f\in GL(E)$,*où* $E=\mathbb{R}^2$.

2) On pose $s=f-3id_E$, montrer que s est une symétrie vectorielle et déterminer ses éléments $Ker(s-id_E)$ *et* $Ker(s+id_E)$.

Fin