Série n°17

Structures algébriques

Exercice 1 Sur $\mathbb{R}$, on définie la loi $*$ par : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x*y=-2xy+2(x+y)-1$.

Montrer que $(\mathbb{R}-\{1\},*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 Soit $I=]-1,1[$, Pour tout élément (x,y) de I^2 on pose : $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I.
2) Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 Sur $\mathbb{C}$, on considère la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$\forall(z=x+iy)\in\mathbb{C},\forall(z'=x'+iy')\in\mathbb{C},\quad z\perp z'=xx'+i(xy'+yx')$$

1) Montrer que la loi $\perp$ est associative et commutative sur $\mathbb{C}$.
2) Montrer que la loi $\perp$ admet un élément neutre.
3) $(\mathbb{C},\perp)$ est-il un groupe ?
4) On pose $G=\{z\in\mathbb{C}/\ \mathrm{Re}(z)\neq 0\}$, montrer que $(G,\perp)$ est un groupe abélien.
5) Soit $H=\{z=x+iy\in\mathbb{C}/\ x>0, y=x\ln x\}$, montrer que $(H,\perp)$ est un sous-groupe de $(G,\perp)$.

Exercice 4 Soit l'ensemble $G=\left\{f_{a,b}:\begin{array}{l}\mathbb{C}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto az+b\end{array}\ /a\in\mathbb{C}^*,b\in\mathbb{C}\right\}$

1) Montrer que (G,o) est un groupe.
2) (G,o) est-il un groupe abélien ?

Exercice 5 Soit $(G,*)$ un groupe. On pose $H=\{a\in G\ /\ a*x=x*a,\ \forall x\in G\}$

Montrer que $(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Exercice 6 Soit $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e.

Montrer que si $\forall a\in G$, $a*a=e$, alors le groupe $(G,*)$ est commutatif.

Exercice7 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ tel que :

$$\begin{cases}\forall x\in E\ : x*x=x\\ \forall x,y,z\in E : (x*y)*z=(y*z)*x\end{cases}$$

Montrer que la loi $*$ est commutative dans E.

Exercice 8 On pose $G=\mathbb{R}-\{2\}$ et on définit sur G la loi suivante :

$$\forall(x,y)\in G^2\quad x\mathrm{T}y=xy-2(x+y)+6$$

1) Montrer que (G,T) est un groupe commutatif.
2) Montrer que l'application $f:x\mapsto x-2$ est un isomorphisme de (G,T) sur $(\mathbb{R}^*,\times)$.

3) Pour $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $x^{(n)} = x \mathrm{T} x \ldots \mathrm{T} x$ $(n \, fois)$ .Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de x et n .

4) Montrer que $(]2,+\infty[, \mathrm{T})$ est un sous-groupe de (G, T) .

Exercice 9 Soient $(G,*)$ et $(H,\perp)$ deux groupes. Soit e_G le neutre de G .

Soit f un morphisme de $(G,*)$ dans $(H,\perp)$. Montrer que :

f est injective $\Leftrightarrow$ $Ker(f) = \{e_G\}$.

Exercice 10 Soit $(G,\bullet)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \bullet x \bullet a^{-1}$ est un isomorphisme de groupes de G dans lui-même.

Exercice 11 Soit $A = \left\{ \dfrac{p}{10^n} \ / \ p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Montrer que $(A,+,\times)$ est un anneau.

Exercice 12 Montrer que l'ensemble D des nombres divisibles par 5 dans $\mathbb{Z}$ (c.à.d que $D = \{ n \in \mathbb{Z} / \ \exists k \in \mathbb{Z}, \ n = 5k \}$) est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Pourquoi n'est-ce pas un sous-anneau de $(\mathbb{Z},+,\times)$?

Exercice 13 Sur $I =]0,+\infty[$, on pose : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \ x \perp y = x^{\ln y}$

1) Montrer que la loi $\perp$ est une loi de composition interne sur I , associative et commutative.

2) Déterminer son élément neutre, et en déduire que $(I,\times,\perp)$ est un corps commutatif.

3) Montrer que l'application $f : x \mapsto e^x$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+,\times)$ vers $(I,\times,\perp)$.

Exercice 14 Soit l'ensemble $\mathbb{Z}[i] = \{ z = a + ib \in \mathbb{C} \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \}$.

1) Montrer que : $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$.

2) Quel sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 15 On pose $\mathbb{Q}[i] = \{ a + ib \in \mathbb{C} \ / \ (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \}$.

Montrer que $(\mathbb{Q}[i],+,\times)$ est un corps.

Fin