Série n° 16

Calculs asymptotiques

Exercice 1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $u_n \sim v_n$

1) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2) Montrer que : $\ln u_n \sim \ln v_n$.
3) A-t'on des propriétés analogues lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$?

Exercice 2 Vrai ou faux ?

1) $\ln x \underset{x\to 0}{=} o(x)$ **2)** $x^{\ln x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\sqrt{x}})$ **3)** $x^2 + \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ **4)** $\exp(x^2+\ln x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(x^2)$

5) $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \Rightarrow f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$ **6)** $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1+x \Rightarrow f(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ **7)** $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+2x$

8) Si (u_n) *et* (v_n) ont la même limite finie, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exercice 3 Donner l'équivalent le plus simple de la fonction au point considéré.

1) $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ *en* $+\infty$ **2)** $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}$ *en* 0 **3)** $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin x}$ *en* 0

4) $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *en* $+\infty$ **5)** $u_n = \ln(n+1) - \ln n$ *en* $+\infty$ **6)** $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ *en* $+\infty$

Exercice 4 **1)** Trouver un équivalent lorsque $x \to 1$ de la fonction $f(x) = e^{x^2+1} - e^{3x-1}$.

2) Trouver un équivalent lorsque $x \to \dfrac{\pi}{2}$ de la fonction $f(x) = \sin x + \cos(2x)$.

Exercice 5 Trouver un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par :

1) $f(x) = x^{\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)} - 1$ **2)** $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1) - \ln(2x^2-1)}{\ln(x^3+1) - \ln(x^3-1)}$

Exercice 6 Trouver un équivalent de la forme λx^α lorsque $x \to 0$ de la fonction

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{shx} - \left(\frac{shx}{x}\right)^{\sin x}$$

Exercice 7 Calculer les limites suivantes en utilisant les relations de comparaisons:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n}$ **2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}}-1$ **3)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{n}}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{\sin^2 x}$ **5)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)$ **6)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

Exercice 8 Montrer que le développement asymptotique, au voisinage de $+\infty$, à la précision $\dfrac{1}{x^3}$,

de la fonction $f(x)=x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ est : $f(x)=-\ln x+1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{4x^3}+o(\dfrac{1}{x^3})$

Exercice 9 Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n}k!\underset{+\infty}{\sim}n!$

Puis trouver le développement asymptotique, à la précision $\dfrac{1}{n^3}$, de $u_n=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}k!$

Fin