Série n°15

Intégration sur un segment

Exercice 1 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction non nulle continue telle que $\int_0^1 f=\int_0^1 f^2$. Montrer que : $f=1$.

Exercice 2 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et on suppose que : $\exists k\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x\in]a,b[\ :\ |f'(x)|\le k$

Montrer que : $\left|\int_a^b f(t)dt\right|\le k\dfrac{(b-a)^2}{4}$

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ $(a<b)$

Montrer que : $\left(\int_a^b fg\right)^2\le\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$

Exercice 4 Montrer que si f est continue sur $[a,b]$, $\lim\limits_{x\to a^+}\int_a^x \dfrac{f(t)}{x-a}=f(a)$.

Exercice 5

Pour $a>0$ et f de classe C^1 sur $[0,a]$ telle que $f'(0)=0$. Montrer que : $\int_0^a |f.f'|\le\dfrac{a}{2}\int_0^a (f')^2$

Intégration par parties

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt$ **2)** $\int_1^2 t^2\ln t dt$ **3)** $\int_0^1 t^2e^t dt$ **4)** $\int_1^e \ln^2 t dt$

5) $\int_0^2 e^{3t}\sin\alpha t\, dt$ **6)** $\int_0^1 (t^2+3t-2)e^{2t}dt$ **7)** $\int_0^1 t(\arctan t)^2dt$ **8)** $\int_0^1 \dfrac{1}{(1+t^2)^2}dt$

Exercice 7 Soit $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt$ (intégrale de Wallis).

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire qu'elle converge.
3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$
4) En déduire les formules pour $n\in\mathbb{N},\ I_{2n}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1}=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 8 Soit $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

En déduire la valeur de I_n pour tout n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 9 Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_a^b f(t)\sin nt\,dt$

.Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Changement de variable

Exercice 10 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$ **2)** $\int_0^1 \frac{2t}{\sqrt{2t+1}}dt$ **3)** $\int_0^1 te^{\sqrt{t}}dt$ **4)** $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

5) $\int_1^2 \sqrt{t^2-1}\,dt$ **6)** $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1+\frac{1}{t^2})\arctan t\,dt$ **7)** $\int_0^1 e^{\arcsin t}dt$ **8)** $\int_0^1 \frac{dt}{cht}$

Exercice 11 pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad et \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$. Montrer que $I_n = J_n$.

Exercice 12 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+2}$.

En déduire la valeur de I_n

Exercice 13 On pose $f(x) = \ln(1+x^2)$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,1]$, à un ordre convenable, montrer que : $\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 14 Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0)=0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}f(x)$.

1) Montrer que F de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et calculer $F''(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$
2) En appliquant à F la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 1, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x t(x-t)f''(t)dt$.

Fin