Série n°14

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

1) $f(x)=|x|\sin x$ **2)** $f(x)=\begin{cases} x\cos(1/x) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$ **3)** $f(x)=\begin{cases} x\sin x\cos(1/x) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

Exercice 2 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & si\ x\leq 0 \\ -2x^2+px+q & si\ x>0 \end{cases}$

Pour quelles valeurs de p et q, f est-elle continue, dérivable en 0 ?

Exercice 3 Soit f une fonction dérivable en un point a .

Montrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$.

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en a ?

Exercice 4 Etudier si Les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$ 2) $g(x)=\begin{cases} x^3\sin(1/x) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$ 3) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

Exercice 5 **1)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est paire.

2) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ paire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' est impaire.

Exercice 6 Trouver $a,\lambda\in\mathbb{R}$ tels que la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} \lambda\sqrt{x} & si\ x<a \\ x^2+12 & si\ x\geq a \end{cases}$

Soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 7 Etudier si Les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $[0,1]$:

1) $f(x)=\arcsin(1-x^3)$ 2) $f(x)=\arccos(2x^2-x)$

Exercice 8 Etudier la classe de la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^3|x|$

Exercice 9 Calculer la dérivée de la fonction f définie par :

1) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 2) $f(x)=x^{\ln x}$ 3) $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$

Exercice 10 Calculer la dérivée n-ème de la fonction f définie par :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$ 3) $f(x)=\sin^2(x)$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Exercice 11 Calculer , à l'aide de la formule de Leibniz, la dérivée n-ème de la fonction f définie par : 1) $f(x)=x^2\cos x$ 2) $f(x)=x^{n-1}\ln x$ 3) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$

Exercice 12 Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $x^n e^{\frac{1}{x}}$ est : $\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 13 Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[0,1]$.On suppose que $f(0)=0$ et que $f'(x)>0,\forall x\in[0,1]$. Montrer qu'il existe $m>0$ tel que : $f(x)\geq mx$, $\forall x\in[0,1]$.

Exercice 14 Par application du T.A.F à $f(x)=\ln x$ sur l'intervalle $[n,n+1]$, où $n\in\mathbb{N}^*$ Montrer que la suite de terme général $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ est divergente .

Exercice 15 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=l$
Montrer que $l=0$

Exercice 16 Soit $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[$.

1) Montrer que $g(x)\neq g(a)$ pour tout $x\in]a,b]$
2) Posons $p=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x)=f(x)-pg(x)$ pour $x\in[a,b]$.
   En appliquant le TH de Rolle à h ,montrer que : $\exists c\in[a,b]$ *telque* $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
3) En déduire que si $\lim_{x\to b^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, alors $\lim_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=l$
4) Application : déterminer $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice 17 Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ et tel que $f(0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Montrer qu'il existe $c\in]0,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice18 En utilisant le théorème des accroissements finis, démontrer les inégalités :

1) $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$
2) $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac{x}{x^2+1}<\arctan x<x$
3) $\forall x\in]0,+\infty[,\ e^x-1-x<x^2e^x$
4) $\forall x\in]0,+\infty[,\ e^x-1-x<\dfrac{1}{2}x^2e^x$

<u>Fin</u>