Série n°13

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Exercice 1 Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \cos^2 x$ 2) $f : x \mapsto \sin 2x - \cos 3x$ 3) $f : x \mapsto E(x) - x$

Exercice 2 Soit $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ .Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer : $\min_{\mathbb{R}}(f)$ *et* $\max_{\mathbb{R}}(f)$.

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que f et g soient paires ou impaires (on a 4 cas). Que peut-on dire de $f.g$ et de $f \circ g$?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(|x|) = |f(x)|$.

Montrer que f est paire.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6 Montrer, en utilisant la définition :

1) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 + x - 2 = 0$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+1} = 2$ 3) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(a)$.

Application : En déduire que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x^4 - x^3$ admet un minimum absolu dans $\mathbb{R}$

Exercice 8 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$ 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ 3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$

4) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x-\pi}{\sqrt{1+\cos x}}$ 5) $\lim\limits_{x \to -1} \sin(x+1)\ln|1+x|$ 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x} - x$

Exercice 9 Déterminer la limite à droite et à gauche des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{|x-2| - 2x}{|x+2| - 4 + 4x}$ *en* 2 *et* -2. 2) $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{x-1}$ *en* 1. 3) $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ *en* $k, (k \in \mathbb{Z})$

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l *en* $+\infty$.

Montrer que f est constante. En déduire que $\lim\limits_{x \to \infty} (x - E(x))$ n'existe pas.

Exercice 11 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0^+} E(\frac{1}{x})$ 2) $\lim_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x})$ 3) $\lim_{x\to 0^+} \frac{E(1/x)+x}{E(1/x)-x}$

Exercice 12

Montrer que la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\sin(\ln(x))$ n'admet pas de limite en $+\infty$

Exercice 13 Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes :

1) $f(x)=x+\sqrt{x^2}$ 2) $f(x)=x-\frac{|x|}{x}$ $si\ x\neq 0, f(0)=-1$ 3) $f(x)=x-E(x)$ 4) $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$

Exercice 14 Préciser l'ensemble de définition des fonctions suivantes, et indiquer les quelles sont prolongeables par continuité en 0.

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{2x+1}-1}$ 2) $f(x)=\frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$ 3) $f(x)=x^x$ 4) $f(x)=\sin x\sin\frac{1}{x}$ 5) $f(x)=\cos x\cos\frac{1}{x}$

Exercice 15 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\begin{cases} f(x)=1 & si\ x\in\mathbb{Q} \\ f(x)=0 & si\ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

1. Montrer que f n'admet de limite en aucun point de $\mathbb{R}$.
2. Soit $g:x\to xf(x)$. Etudier les limites de g en tout point de $\mathbb{R}$

Exercice 16 Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x\geq 0,\quad f(x^2)=f(x)$.

Montrer que f est constante.

(**Indication** : Soit $x>0$, considérer la suite récurrente $u_0=x\ et\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{u_n}$)

Exercice 17

1. Montrer que l'équation $x^5=x^3+4$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $x\sin x=\cos x$ admet au moins deux solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 18 Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ continue. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

Exercice 19 Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(a)<0$.

Montrer que $\exists c\in]a,b[$ tel que : $f(c)=\frac{a-c}{b-c}$.

Exercice 20 Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que :

$\forall x\in[a,b],\ 0<f(x)<g(x)$. Montrer que : $(\exists\lambda\in]0,+\infty[)(\forall x\in[a,b])\ \ (1+\lambda)f(x)\leq g(x)$.

****

FIN