Série n°12
Suites des nombres réels

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants dire si la suite réelle (u_n) est majorée, minorée, bornée, monotone:

1) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **2)** $u_n = \sqrt[n]{n} \quad (n \geq 3)$ **3)** $u_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$

4) $u_n = 2n + \sin n$ **5)** $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geq 1)$

Exercice 2

1) En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

2) Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$. Montrer que : $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{2^k} < b - a$.

3) Montrer qu'il existe un nombre rationnel de la forme $\dfrac{p}{2^k}$, avec $p \in \mathbb{Z}$, tel que :

$a < \dfrac{p}{2^k} < b$

Exercice 3 Déterminer les limites des suites de terme général :

1) $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$ 2) $u_n = \dfrac{E(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ 3) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ 4) $u_n = n(\sqrt{1+n^2} - n)$

5) $u_n = \dfrac{2n - \sqrt{n^2+1}}{5n - \sqrt{4n^2+n}}$ 6) $u_n = n^2 \sin(\dfrac{1}{n})$ 7) $u_n = \dfrac{10^n}{n^{10}}$ 8) $u_n = \ln n - \sin n$

Exercice 4 Etudier la convergence et trouver la limite, si elle existe des suites de terme général :

$$1)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2n}{n^2+k} \quad 2)\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \quad 3)\ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(k\pi)$$

Exercice 5 Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 6

Etudier la monotonie, puis la convergence de la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}.$$

Exercice 7

1. Montrer que,si une suite (u_n) est convergente alors la suite $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0
2. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}$ est divergente.

Exercice 8 Soit la suite réelle de terme général u_n défini par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\quad(n\geq 1)$

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 2u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$. En déduire que (u_n) est majorée.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9 Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$.

1. Etudier les suites (v_n) *et* (w_n) définies par : $v_n=u_{2n}\ et\ w_n=u_{2n+1}$
2. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 10 Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que :

1. $(u_{2n})et\ (u_{2n+1})$ convergent vers la même limite $\Rightarrow$ (u_n) converge.
2. $(u_{2n}),(u_{2n+1})\ et\ (u_{3n})$ convergent $\Rightarrow$ (u_n) converge.

Exercice 11 Soit les suites $(u_n),(v_n)et\ (w_n)$ définies par :

$w_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\quad ;\ u_n=w_{2n}\quad et\quad v_n=w_{2n+1}$

Montrer que les suites $(u_n)\ et\ (v_n)$ sont adjacentes et en déduire que (w_n) est convergente.

Exercice 12

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0=1,v_0=2,\ \forall n\in\mathbb{N}:\frac{2}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}\ ,\ v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$

1. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont positives et vérifient : $\forall n\in\mathbb{N},v_n\geq u_n$
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ |v_{n+1}-u_{n+1}|\leq|v_n-u_n|$
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite est $\sqrt{2}$

****

FIN