Série n°11

Nombres réels

Exercice 1 Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ Montrer que :

1. $x+y<x^2+y^2+1$
2. $\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right|\le|x-y|$
3. $|x|+|y|\le|x+y|+|x-y|$
4. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{34-x^2}=1-2x$ **2)** $x+1\le\sqrt{x+7}$ **3)** $\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}+\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}=1$

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ définie par : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=E\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f(\mathbb{Z})$ et $f^{-1}(\{k\})$ tel que $k\in\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=E(2x)-E(x)$.

Exercice 4 Soient $x\in\mathbb{R}$, *et* $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

1) $0\le E(nx)-nE(x)\le n-1$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$: **1)** $E\left(\dfrac{x-1}{2}\right)=x$ **2)** $E\left(\dfrac{x^2+2x-5}{4}\right)=\dfrac{x+1}{2}$

Exercice 6 Soient A et B deux parties non vides et majorés de $\mathbb{R}$, on pose :
$A+B=\{x+y\,;(x,y)\in A\times B\}$ et $A.B=\{xy\,;(x,y)\in A\times B\}$
Montrer que : **a)** $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
b) Si $A\subset\mathbb{R}^+$ *et* $B\subset\mathbb{R}^+$, alors $\sup(A.B)=\sup A.\sup B$

Exercice 7 Soients A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, et $B=\{|x-y|;(x,y)\in A\times A\}$.
Montrer que : $\sup B=\sup A-\inf A$.

Exercice 8 Donner la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble A :

1) $A=\left\{\dfrac{1}{n+1};n\in\mathbb{N}\right\}$ **2)** $A=\left\{\dfrac{1}{n+1}-3;n\in\mathbb{N}^*\right\}$ **3)** $A=\left\{(-1)^n-\dfrac{2}{p};n\in\mathbb{N},p\in\mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 9 **(point fixe)**
Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une application croissante. On pose $A=\{x\in[0,1];f(x)\ge x\}$

1. Montrer que A est non vide et $\sup A$ existe. On note alors $\alpha=\sup A$.
2. Montrer que $f(\alpha)\ge\alpha$. (Indication : On pourra raisonner par l'absurde).
3. Montrer que $f(\alpha)\le\alpha$, puis conclure.

****

FIN