Série n°9

Courbes Paramétrées

Exercice 1 Déterminer un vecteur directeur de la tangente en un point $M(t) \in (\Gamma)$ dans les cas suivants :

$$(\Gamma_1):\begin{cases} x(t)=t^2-4t \\ y(t)=t^2+2t \end{cases} \qquad (\Gamma_2):\begin{cases} x(t)=t-\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases} \qquad (\Gamma_3):\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t)=\dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$$

Exercice 2 Etudier la nature des points stationnaires des courbes suivantes :

$$(\Gamma_1):\begin{cases} x(t)=t^2+t^3 \\ y(t)=t^4 \end{cases} \qquad (\Gamma_2):\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{1-t^2} \\ y(t)=\dfrac{t^3}{1-t^2} \end{cases}$$

Exercice 3 Montrer que la courbe $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=t-t^3 \\ y(t)=\sin t \end{cases}$ admet un point d'inflexion.

Exercice 4 Etudier les branches infinies des courbes définies par :

$$(\Gamma_1):\begin{cases} x(t)=\dfrac{2t}{t^2+1} \\ y(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1} \end{cases} \qquad (\Gamma_2):\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y(t)=\dfrac{t^2-2t}{t-3} \end{cases} \qquad (\Gamma_3):\begin{cases} x(t)=\dfrac{t}{\ln t} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Exercice 5 Etudier et construire les courbes paramétrées suivantes :

$$(\Gamma_1):\begin{cases} x(t)=t+\dfrac{1}{2t^2} \\ y(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{t} \end{cases} \qquad (\Gamma_2):\begin{cases} x(t)=\dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Exercice 6 Soit la courbe paramétrée suivante : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=t^3-t \\ y(t)=t^4-t^2 \end{cases}$

1) Montrer que (Γ) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
2) Déterminer les points double de (Γ)
3) Etudier les variations de x et y sur $\mathbb{R}^+$
4) Donner les équations des tangentes à (Γ) aux points de paramètres :

   $t=0\,,1\;,\;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\;,\;\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
5) Etudier la branche infinie de (Γ) quand t tend vers $+\infty$; Puis construire (Γ).

Exercice 7 Soit la courbe paramétrée suivante : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=t\ln t \\ y(t)=\frac{1}{t}\ln t \end{cases}$, $t\in\,]0,+\infty[$

1) Comparer les points $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$. En déduire une symétrie de la courbe et une réduction du domaine d'étude à un intervalle qu'on déterminera.
2) Etudier et construire la courbe (Γ).

Exercice 8 Soit la courbe paramétrée suivante : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=\tan t+\sin t \\ y(t)=\dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de la courbe (Γ)
2) Etudier la périodicité de la courbe et ses symétries. En déduire une réduction du domaine d'étude.
3) Etudier et construire la courbe (Γ).

Exercice 9 On considère l'astroïde, c'est-à-dire la courbe paramétrée : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=a\cos^3 t \\ y(t)=a\sin^3 t \end{cases}$, $a>0$

1) Etudier la périodicité de la courbe et ses symétries. En déduire une réduction du domaine d'étude.
2) Etudier et construire la courbe (Γ).

Exercice 10 Etudier et tracer les courbes définies en polaires par :

1) $\rho(\theta)=\sin\theta$ 2) $\rho(\theta)=1+\cos\theta$ 3) $\rho(\theta)=\cos 2\theta-\sin\theta$ 4) $\rho(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta-1}$
5) $\rho(\theta)=\tan\theta$

Exercice 11 Calculer la longueur de l'astroïde définie par : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=a\cos^3 t \\ y(t)=a\sin^3 t \end{cases}$, $a>0$

Exercice 12 Calculer la longueur du Cardioïde (Γ) définie en polaires par $\rho(\theta)=a(1+\cos\theta)$, $a>0$

Exercice 13 Calculer, en prenant comme origine le point de (Γ) correspond à $t=1$, l'abscisse curviligne en tout point de la courbe : $(\Gamma):\begin{cases} x(t)=(1-t^2)e^t \\ y(t)=2(1-t)e^t \end{cases}$

Exercice 14 Calculer, en prenant comme origine le point de (Γ) correspond à $\theta=0$, l'abscisse curviligne en tout point de la courbe : $\rho(\theta)=1-\theta^2$

****

FIN