Série n°8

Développements limités

Exercice 1 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln(2+x)$ 2) $f(x)=\sin(2x)+\cos x$ 3) $f(x)=e^{2x}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ 5) $f(x)=\sqrt{1+2x}$

6) $f(x)=\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$ 7) $f(x)=x\ln(2-x)$ 8) $f(x)=chx\sin x$ 9) $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{1-x}$ 10) $f(x)=(1+x)^3e^{2x}$

Exercice 2 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{2+x+x^2}$ 2) $f(x)=\tan x$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{ch\,x}$ 4) $f(x)=\ln(\dfrac{\sin x}{x})$ $si\ x\in\left]0,\pi\right[$ $et\ f(0)=0$

5) $f(x)=e^{e^x}$ 6) $f(x)=\ln(1+\cos x)$ 7) $f(x)=\sqrt{e^x}$ 8) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre 2n des fonctions suivantes :

1) $f(x)=Arc\tan x$ 2) $f(x)=Arc\sin x$ 3) $f(x)=Arc\cos x$ 4) $f(x)=Argthx$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes à l'aide des D.L:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\ ;\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{Arc\sin x-x}{x^3}\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\cos x+chx-2}{x^4}\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x-2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)-x-\frac{x^3}{6}}{x^3}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x-\sqrt{2}}{(x-\frac{\pi}{4})^2}\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}.$$

Exercice 5 Donner le développement limité des fonctions suivantes en a à l'ordre 3 :

1) $x\to e^x$, $a=1$ **2)** $x\to Arc\tan x$, $a=1$ **3)** $x\to\sin x\cos(3x)$, $a=\dfrac{\pi}{3}$ **4)** $x\to\dfrac{\ln x}{x}$, $a=3$

Exercice 6 Soit $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7 Soit la fonction $f:x\to\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}$; Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, noté g et que ce prolongement g est dérivable en 0.

****