Série n°2

Nombres complexes

Exercice 1 Donner l'écriture algébrique des complexes suivants :

$$X=\frac{2+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\quad;\quad Y=\frac{1}{\sqrt{5}-2i}\quad;\quad Z=\frac{i}{3+4i}\quad;\quad T=\frac{-1+3i}{3-2i}.$$

Exercice 2 On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Montrer que :

1) $1+j+j^2=0$ 2) $j^3=1$

Exercice 3 Soient $z=\frac{3i+2}{2i+3}$; $t=\frac{2-3i}{3-2i}$. Montrer que : $z+t\in\mathbb{R}$ et $z-t\in i\mathbb{R}$.

Exercice 4 Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}-\{i\}$: $\frac{1-iz}{1+iz}\in\mathbb{R}\Rightarrow z\in i\mathbb{R}$

Exercice 5 Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2\ tq : |a|=|b|=1\ et\ \ a\neq b$. Montrer, pour tout $z\ de\ \mathbb{C}$:

$$\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}\in i\mathbb{R}$$

Exercice 6 Ecrire sous la forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$, $(\rho>0,\theta\in\mathbb{R})$ les complexes suivants :

$z=-4+4i$; $z=(1+i\sqrt{3})^7$; $z=(\cos(\pi/5)+i\sin(\pi/5))(\frac{\sqrt{3}+i}{2})(1-i)$;

$$z=\frac{\sin(5\pi/12)+i\cos(5\pi/12)}{\sqrt{3}-i}$$

Exercice 7

1. Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ montrer que : $\left||z|-|z'|\right|\leq|z-z'|$ (inégalité triangulaire renversée)
2. Soient $k\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C}\ \ tq\ |z|\leq k\leq 1$; Montrer que : $1-k\leq|1+z|\leq 1+k$.

Exercice 8 Déterminer le module et l'argument de $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $v=1-i$ et $w=\frac{u}{v}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 9 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes : $e^{e^{i\alpha}}$ et $e^{i\beta}+e^{2i\beta}$

Exercice 10 Soient a et b deux complexes non nuls. Montrer que : $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right|=\frac{|a-b|}{|a||b|}$

Exercice 11 Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tel que $|a|=|b|=|c|=1$ .Montrer : $|ab+bc+ac|=|a+b+c|$

Exercice 12 Prouver que pour tout $(u,v)\in\mathbb{C}^2$,on a :

$|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2)$ .Donner une interprétation géométrique.

Exercice 13 Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. Les points A(1), M(z) et N(z^2) soient alignés ;

2. $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$
3. Les points M(z) , N(z^2) et P(z^3) forment un triangle rectangle en N ;
4. Les points M(z) , N(i) et P(iz) forment un triangle rectangle isocèle en N

Exercice 14 **1**. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

2. Calculer les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 15 Déterminer les racines cubiques de $U=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^4=-1\,;\; z^3=ie^{\frac{i\pi}{5}}\;;\; z^5=1+e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2+2z+4=0$; $z^2+10z+169=0$; $z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0$; $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$; $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$

Exercice 18 Soit $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$z^2+2(1-\cos 2\theta)z+2(1-\cos 2\theta)=0$. Puis écrire les solutions sous formes trigonométriques.

Exercice 19 On cherche les nombres complexes a, b et c de module 1 tels que :
a + b + c = 1 et abc = 1.
Montrer que pour tout nombre complexe z on a (z – a) (z – b) (z – c) = z^3-z^2+z-1.
En déduire les valeurs de a , b et c.

Exercice 20 Linéariser $\sin^3 x$; $\sin^2 x\cos^3 x$ et $\cos^4(2x)$.

Exercice 21 En utilisant les nombres complexes, calculer cos(5α) et sin(5α) en fonction de cos α et sin α.

Exercice 22 On pose : $u=e^{2i\pi/5}, \alpha=u+u^4 \; et \; \beta=u^2+u^3$.

1. Montrer que $\alpha \, et \, \beta$ sont solution de l'équation du second degré : $X^2+X-1=0$.
2. Déterminer α en fonction de cos $(\frac{2\pi}{5})$ et β en fonction de cos $(\frac{4\pi}{5})$.
3. En déduire les valeurs de cos $(\frac{2\pi}{5})$ et de cos $(\frac{4\pi}{5})$.

Exercice 23 Soit $v=e^{2i\pi/7}$ et $S=v+v^2+v^4$

1. Calculer $\overline{S}$ en fonction de v.En déduire $S+\overline{S}$ et $S\overline{S}$. Quel est le signe de $\mathrm{Im}(S)$?
2. Montrer que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2} \; et \; \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 24 **1**. Caractériser géométriquement l'application :

$$\begin{cases} f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ \quad z\mapsto -2z+3-3i \end{cases}$$

2. Soit r la rotation de centre le point d'affixe 1+i et d'angle de mesure $\theta=\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe.