Série n°1

Eléments de logiques - Ensembles et applications

Exercice 1 Soient P, Q deux propositions. Montrer que :

1. Les propositions $(P \Rightarrow Q);(\neg Q \Rightarrow \neg P)\, et\, (\neg P ou Q)$ sont équivalentes.
2. Les propositions $(P \Leftrightarrow Q);(P \Rightarrow Q et Q \Rightarrow P) et (\neg P \Leftrightarrow \neg Q)$ sont équivalentes.

Exercice 2 Soient P ,Q et R trois propositions. Montrer que :

1. $(P et Q)\, ou\, R \Leftrightarrow (P ou R)\, et\, (Q ou R)$
2. $(P ou Q)\, et\, R \Leftrightarrow (P et R)\, ou\, (Q et R)$

Exercice 3 (méthodes de raisonnements)

1. Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que : $x + \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow x \leq 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, montrer que : f est paire et impaire $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 4
1. Déterminer $P(E)$ pour E={a, b ,c }.
2. Déterminer $P(E)$ et $P(P(E))$ pour E={a, b }.

Exercice5 Montrer par contraposition les assertions suivantes , E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in P(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
2. $\forall A, B, C \in P(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$..

Exercice 6 Soient les ensembles :

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x| \geq 2 \right\} \quad ; \quad F = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \exists y \in \mathbb{R}^*, x = y + \frac{1}{y} \right\}$$

Montrer que : $E = F$

Exercice 7 Soient E un ensemble et I un ensemble non vide, soient A une partie de E et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, on note $\bigcup_{i \in I} A_i$ la partie de E donnée par : $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E; \exists i \in I, x \in A_i\}$;

et on note : $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E; \forall i \in I, x \in A_i\}$.

Montrer que :

a) $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$ et $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$

b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ et $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

Exercice 8 Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que :

1. $(E \cup F) \times G = (E \times G) \cup (F \times G)$
2. $(E \cap F) \times G = (E \times G) \cap (F \times G)$

3. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ alors $\overline{A \times B} = (\overline{A} \times F) \cup (E \times \overline{B})$.

'**Exercice 9** Soient $f : E \to F$ une application et B une partie de F.

Montrer que : $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

Exercice 10

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $telle\,que$ $f(x) = -2x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. est une bijection ; puis déterminer f^{-1}.

2. Trouver une bijection affine entre [0,2] et [-1,3].

Exercice 11 Soit l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $telle\,que$ $f(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Donner un prolongement g de f dans $\mathbb{R}$ tel que g soit paire.

Exercice 12 Soit $f : E \to F$, Montrer que :

1. f injective $\Rightarrow \forall A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
2. f surjective $\Rightarrow \forall A \subset E$, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$

Exercice 13 Soient E un ensemble non vide , A et B deux parties de E. Soit f l'application définie de $P(E)$ à valeurs dans $P(A) \times P(B)$ par :

$$\forall X \subseteq E : f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. Calculer $f(E)$ et $f(A \cup B)$. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ $A \cup B = E$
2. Montrer que : f est surjective $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Déterminer dans ce cas f^{-1}.

Exercice 14 Soit A une partie d'un ensemble E, on note i_A l'application $i_A : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$\forall x \in A$ $i_A(x) = 1$ et $\forall x \in C_E^A$ $i_A(x) = 0$.

L'application i_A s'appelle fonction indicatrice de la partie A de E.

Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que : $a)$ $i_{A \cap B} = i_A . i_B$ $b)$ $i_{A \cup B} = i_A + i_B - i_A . i_B$
2. Montrer que : $(A = B \Leftrightarrow i_A = i_B)$.

Exercice 15 Soient $f : E \to F, g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

Montrer que si gof et hog sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 16 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si gof est injective et f est surjective alors g est injective.
2. Montrer que si gof est surjective et g est injective alors f est surjective.

Exercice 17 Soient E un ensemble et A une partie de E, soit l'application :

$\varphi_A : P(E) \to P(E)$ définie par : $\forall X \in P(E)$, $\varphi_A(X) = A \cup X$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$(i) \varphi_A$ est injective

$(ii) \varphi_A$ est surjective

$(iii) \varphi_A$ bijective

$(iv) A = \varnothing$

Exercice 18 Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (f est une application d'un ensemble E dans lui même) :

1. f est injective.

2. $\forall X \in P(E),\ f^{-1}(f(X)) = X$.

3. $\forall X, Y \in P(E) \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

4. $\forall X, Y \in P(E) \quad X \cap Y = \varnothing \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \varnothing$.

Exercice 19 Soit E un ensemble non vide et $f : E \to P(E)$ une application ; montrer que f ne peut pas être surjective.

(Considérer $X = \{a \in E; a \notin f(E)\}$ et faire un raisonnement par l'absurde).

.

Exercice 20 Soient E un ensemble et $f : P(E) \to \mathbb{R}^{+}$ une application vérifiant :

$\forall A, B \in P(E)\ [A \cap B = \varnothing \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)]$

a) Montrer que $f(\varnothing) = 0$

b) Soient $X, Y \in P(E), montrer$ que $f(X \cup Y) = f(X) + f(Y) - f(X \cap Y)$.

c) Soient $X, Y, Z \in P(E), calculer \quad f(X \cup Y \cup Z)$.

****