Lycéé Al Khawarizmi **SERIE 12**
SPE TSI 1 2010-2011

Exercice 1:
Démontrer que les formules ci-dessous définissent des produits scalaires sur E

1. $E=\mathbb{R}^3$ et $\langle x,y\rangle = 2x_1y_1+3x_2y_2+x_3y_3$ pour $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$
2. $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $\langle P,Q\rangle = P(2)Q(2)+P(-3)Q(-3)+P(3)Q(3)+P(0)Q(0)$ pour tout P et Q de $\mathbb{R}_3[X]$
3. $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: l' espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$. Que se pase t'il si on remplace E par $E'=\mathcal{CM}([0,1],\mathbb{R})$ (fonctions continues par morceaux). Justifiiez votre réponse.

Exercice 2:
Soit $E=\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire : $\langle x,y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_iy_i$ et soit $F=\text{Vect}\{(1,1,-1,0),(2,-1,0,1)\}$ et p la projection orthogonale de E sur F.

1. Determiner la matrice de p relativement à la base canonique.
2. Construire une base orthonormale de F
3. Soit $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.
   (a) Exprimer en fonction de x,y,z et t le vecteur $p(u)$
   (b) Exprimer en fonction de x,y,z et t la distance de u à F.
   (c) Retrouver ce résultat à l'aide de la formule avec les determinants de Gram

Exercice 3:
Soit E le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel des suites réelles $u=(u_n)$ tel que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente.

1. Montrer que $\langle u,v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_nv_n$ définit un produit scalaire sur E
2. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on désigne par U_m la suite définie par $(U_m)_n=\delta_{nm}$ (symbole de Kronecker). Montrer que la famille $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E
3. Soit $F=\text{Vect}U_0,U_1,U_2$.
   (a) justifier le fait que la projection orthogonale p_F de E sur F est bien définie.
   (b) Soit $x=(x_n)$ la suite définie par $x_n=\dfrac{1}{n+1}$. Justifier que $x\in E$ et determiner $p_F(x)$
   (c) Calculer $d(x,F)$

Exercice 4:
Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour tout P et Q de E, on pose :

$$(1)\quad \langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note T_n le n ème polynôme de Tchebychev de première espèce, c'est-à-dire l'uniue polynôme verifiant :

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

1. Montrer que (1) ci-dessus definit un produit scalaire sur E
2. Montrer que $(T_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale de l'espace préhilbertien réel $(E;\langle,\rangle$.
3. Construire une famille orthonormale à partir de $(T_n)_{n\geq 0}$
4. Soit F le plan engendré par les polynômes 1 et X. Calculer $d(X^2,F)$
   (a) En utilisant la projection orthogonale de E sur F
   (b) En utilisant les determinants de Gram

Exercice 5:
On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure eucildienne canonique et Soit $F=\text{Vect}\{e_1,e_2\}$ avec $e_1=(1,2,3)$ et $e_2=(0,1,2)$. Soit $a=(x,y,z)\in E$. Calculer $d(a,F)$ en fonction de x,y et z .

Exercice 6:
Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique , on considére les vecteurs $u=(1,1,-1,0);v=(-2.1.0.2)$ et $w=(1,3.0,0)$.

1. Determiner la matrice $\text{Gram}(u,v,w)$
2. Calculer $G(u,v,w)=\det(\text{Gram}(u,v,w))$
3. En deduire le rang de la famille (u,v,w)

Exercice 7:
Soit E un espace euclidien de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. Demontrer que pour toute famille libre $u_1,...,u_k)$ de E on a : $G(u_1,...,u_k)$ est égal au volume du parllélotope construit sur les vecteurs $u_1,...,u_k$

Exercice 8:
on considère le système linéaire $\quad (S);\begin{cases}2x+5y=1\\ x-y=0\\ 3x+4y=2\end{cases}$ et soit :

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&-1\\3&4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

1. Montrer que (S) n'admet aucune solution
2. Quel est le rang de A ?
3. Determiner $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $||AX_0 - b||$ est minimal

On dit que X_0 est la meilleure approximation au sens des moindres carrés d'une solution du système (S).

Exercice 9:
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ on a $\langle AX, X\rangle \geq 0$. démontrer que pour toute matrice symétrique positive A il existe une matrice symétrique positive B tel que $B^2 = A$

Exercice 10:
Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique pour lequel la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormale. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est M. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g) = {}^tM$. Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ d'equation : $ax+by+cz = 0$.Demontrer que P est stable par f si et seulement si le vecteur $n = (a, b, c)$ est un vecteur propre de g.

Exercice 11:
Soit $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. A quelle transformation correspond A dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique ?

Exercice 12:
Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$. On considére les matrices suivantes :
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathcal{F} = (I, K)$ est une famille orthogonale de E
2. Determiner le projeté orthogonal de M sur $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$

Exercice 13:
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 3$.On considère deux vecteurs unitaires a et b de E tel que la famille (a, b) est libre. Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$(\forall x \in E) \quad f(x) = \langle x\rangle aa + \langle x\rangle bb$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
2. Déterminent $kerf$
3. Connaissez vous une valeur propre de f ? Si oui determiner les autres.

Exercice 14:
Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer sans le moindre calcul que f est diagonalisable dans une base orthonormale
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$
3. Sans calculer le polynôme caractéristique de A determiner les ordres de multiplicité des valeurs propres de A. En déduire χ_A
4. Determiner les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} . Construire des bases orthonormales pour chacun d'eux (utiliser Gram-Shmidt)
5. Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 15:
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$. On considère une base orthonormale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et soit f et g deux endomorphismes de E dont les matrices relativement à $\mathcal{B}$ sont notées A et B. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que la relation

$$x.y = \langle f(x), g(y)\rangle$$

définit un produit scalaire sur E