Exercice 1:
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$
2. Montrer que f est continue sur I
3. Pour $x \in I$ simplifier $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x est voisin de 0 et un équivalent de $xf(x)$ quand x est voisin de $+\infty$.
4. Calculer les limites de f aux bornes de I.

Exercice 2:
Soit g la fonction définie par : $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}dt$

1. Calculer $g(0)$. Determiner l'ensemble de définition de g.
2. Etudier la continuité de g en tout point de son ensemble de définition.
3. Etudier les variations de g sur son domaine de définition.
4. Etudier la limite de g en $+\infty$.

Exercice 3:
On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 + x^2}{x^3 + e^t}dt$.

1. Prouver que f est bien définie sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$
2. f est elle définie au point $x = -1$?
3. montrer que f est continue sur I
4. Montrer que f est de classe C^1 sur I et expliciter $f'(x)$ sous forme d'une intégrale

Exercice 4:
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + x^2)^n}dt$

1. Montrer que f_n est bien définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$
2. Montrer que f_n est continue sur I
3. Montrer que f_n est de classe C^1 sur I
4. Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in I$
5. En déduire une forme simplifiée de $f_n(x)$ pour tout $x \in I$

Exercice 5:
On se propose de démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (intégrale de Gauss).Pour cela on considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ et la fonction G définie par $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$

1. Prouver que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser F' et G'

2. Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
4. Conclure.
5. En utilisant ce résultat étudier la fonction g définie par $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)dt$

Exercice 6:

1. Démontrer que les fonctions f et g définies par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$ sont des solutions d'une même équation différentielle du second ordre sur un intervalle à determiner
2. En déduire la valeur de l'integrale de Dirchlet : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

Exercice 7:

On considère les fonctions f, g, G, h les fonctions définies sur :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}dt, g(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{t^2+1}dt, G(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt, H(t)=\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

1. Montrer que G et H sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et expliciter $G'(x)$ et $H'(x)$ pour tout $x>0$.
2. montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[\quad f(x)=(\cos x)G(x)-(\sin x)H(x)$
3. Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[\quad H(x)=c+\displaystyle\int_x^1\frac{\cos u}{u}du$ où c est une constante à determiner. En déduire que :
$$\forall x\in]0,1]\quad |H(x)|\le c-\ln x$$
et que
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$
et que f est continue au point 0 à droite.
4. Comment justifier que f est continue sur $]0,+\infty[$?
5. motrer que f est une solution de l'equation differentielle :
$$(E)\quad y''+y=\frac{1}{x}$$
sur l'intervalle $I=]0,+\infty[$.
6. Montrer que g est aussi une solution de (E) sur I
7. En déduire que $f(x)-g(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$ pour tout $x>0$ avec α et β des constantes réelles .
8. Montrer que pour tout $x>0$, on a : $|f(x)|\le|G(x)|+|H(x)|$ et $|g(x)|\le\dfrac{2}{x}$
9. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et en déduire que $\alpha=\beta=0$
10. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{2}$