Exercice 1:
determiner le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum nz^n$
2. $\sum \frac{z^n}{n}$
3. $\sum n!z^n$
4. $\sum n^\alpha z^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $\sum n^n z^n$
6. $\sum \ln z^n$
7. $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right) z^n$
8. $\sum \frac{z^n}{\ln n}$

Exercice 2:
Donner le développement en série entières des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $f(x) = \cos x + \sin x^2$
3. $f(x) = \arctan x$
4. $f(x) = e{-}x^2$
5. $f(x) = \arcsin x$
6. $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{2x^2-1}\right)$
7. $f(x) = \frac{x+3}{(3x+2)(x-3)}$

Exercice 3:
On considère la série entière $\sum n^2 x^n$.

1. Determiner son rayon de convergence R
2. Etudier le comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence (indication : on pourra remarquer que $n^2 = n(n-1) + n$)

Exercice 4:
Soit $f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$

1. Determiner le rayon de convergence R de la série entière exprimant f.
2. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$ tel que $x \neq 0$, on a : $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)$
3. Simplifier $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$
4. La série entière ci-dessus converge t elle aux bornes de son intervalle de convergence ?

Exercice 5:
On considère l'équation différentielle :

$$y'' + xy = x^2 + x + 2$$

Prouver qu'elle admet comme solution une fonction developable en série entière et determiner son rayon de convergence

Exercice 6:
On considère deux séries entières à coefficients réels $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayons de convergence respectifs R et R'. Prouver que :

1. $a_n = O(b_n) \Rightarrow R \geq R'$
2. $a_n = o(b_n) \Rightarrow R \geq R'$
3. $a_n \sim b_n \Rightarrow R = R'$

Exercice 7:
En utilisant le théorème concernant le comportement d'une série entière aux bornes de son intervalle de convergence donner la valeurs des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 8:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk!$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n + 1 - \dfrac{1}{n!}$
2. En déduire que la série $\sum a_n x^n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 9:
Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \dfrac{n}{n^2+n-2} a_n z^n$ ont même rayon de convergence

Exercice 10:
Soit $\sum a_n$ une série divergente à terme réels strictement positifs tel que $a_n = o(S_n)$ où S_n est le terme générale de la somme partielle de la série $\sum a_n$. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum S_n z^n$.