Exercice 1:
Pour chacune des fonctions suivantes, determiner l'ensemble de définition D_f. Pour chaque cas, expliciter les dérivées partielles de f lorsqu'elles existent.

1. $f(x,y) = (x+y)^2 \exp(xy)$,
2. $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+\sqrt{x^2+y^2+x^2})$,
3. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$,
4. $f(x,y,z) = x^2y^2\sqrt{z}$.

Exercice 2:
Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x\cos y + ye^x$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $u \neq 0$. Calculer $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} f((a,b)+tu)$. Que trouve t'on si $u=(1,0)$? $u=(0,1)$?

Exercice 3:
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
3. La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Exercice 4:
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Montrer que $\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$.

Exercice 5:
Soient la fonction : $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et la fonction : $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = (\sin(xy), y\cos x, xy\sin(xy)\exp(y^2)) \quad \text{et} \quad g(u,v,w) = uvw.$$

1. Calculer explicitement $g \circ f$.
2. E déduire les derivées partielles de $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(u,v,w)$ de f et de g.
4. Retrouver le results du 2) par une autre méthode.

Exercice 6:
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y+3y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Est ce que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Si oui les calculer.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur son ensemble de définition ?
4. Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$.
5. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(1,1,2)$.
6. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x,y) = (f(x,y), f(y,x))$. Déterminer la matrice jacobienne de F au point $(1,1)$.Pour quelles valeurs de (x,y) cette matrice est inversible ?

Exercice 7:
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue

1. Soit g la fonction définie par : sur $\mathbb{R}$ par
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = \int_0^{2x} f(t, t^2)dt$$
Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Généralisation : On considère des fonctions u, v et φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et la fonction g définie par :
$$g(x) = \int_0^{\varphi(x)} f(u(t), v(t))dt$$
Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tel que
$$g(x,y,z) = (f(x+y+z), f(xyz))$$
Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice jacobienne de g en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 9:
Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles la fonction g définie sur $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ par $g(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ vérifie :
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$$

Exercice 10:
Etudier les extremum locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + y^3$ sur $\mathbb{R}^2$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \sin(x^2 + y^2)$ sur $[-1,1]^2$
3. $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$
4. $f(x,y) = e^{x \cos y}$ sur $\mathbb{R}^2$