SERIE NO 08
SERIES NUMERIQUES

Exercice 1

En discutant éventuellement selon la valeur des paramètres réels α et β, étudier les séries de termes généraux positifs $(n \geq 2)$:

1) $\dfrac{n+\alpha}{n+\beta}$, **2)** $\dfrac{1}{n(n^2-1)}$, **3)** $\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+\alpha n}$, $\alpha \leq 2$, **4)** $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)+\ln n^2+\dfrac{\sqrt{n}}{n^2-n}$,

5) $\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, **6)** $\dfrac{1}{(1+1/\sqrt{n})^{n\sqrt{n}}}$, **7)** $\dfrac{n^n\alpha^n}{n!}$ **8)** $\dfrac{1}{n^n}$ **9)** $\dfrac{1}{(\ln n)^n}$

10) $2^{\frac{1}{n}}$ **11)** $\sqrt[n]{n}-1$, **12)** $n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}$, **13)** $\displaystyle\int_n^{n+1/2}\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}dt$, **14)** $n^{\alpha}\left[(n+1)^{(n+1)/n}-(n-1)^{(n-1)/n}\right]$,

15) $\displaystyle\int_1^{\infty}\exp(-x^n)\,dx$ (indication : changer de variable $t=x^n$) .

Exercice 2

Etudier, suivant les valeurs de $p \in \mathbb{N}$, la nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!}$.

Exercice 3

Calculer les sommes des séries suivantes, en montrant leur convergence :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(n+1)3^{-n}$ **2)** $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}$ **3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Exercice 4

Déterminer la nature de la série de terme général :

1) $\dfrac{n!}{n^n}$ **2)** $(\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$ **3)** $n^{-(1+(1/n))}$ **4)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ **5)** $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ **6)** $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 5

Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $\sum u_n$ converge. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_n)=0$.

(**Indication** : Encadrer $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.)

Exercice 6

Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ deux séries À termes réels strictement positifs. On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ converge, et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+2}}{v_n}$.. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2}u_n$ converge.

Exercice 7

Justifier la convergence et calculer les sommes des séries suivantes

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+k)}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, **2)** $\displaystyle\sum\frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$, **3)** $\displaystyle\sum\frac{n^2+n-3}{n!}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln\frac{n^2}{n^2-1}$.

Exercice 8

Déterminer, en fonction des paramètres réels α, β, la nature des séries de termes généraux $(n \geq 2)$

1) $(-1)^n n^{\alpha}$ **2)** $n^{\beta}(1-(-1)^n n^{\alpha})$ **3)** $\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ **4)** $\exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{n}}-1\right)$

5) $\ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ **6)** $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Exercice 9

Etudier les séries de termes généraux

1) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$ **2)** $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^{\alpha}+(-1)^n}}$ où $\alpha > 0$ **3)** $w_n = \ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}})$ où $\alpha > 0$

Indication : D.L.

Exercice 10

1) Montrer que que la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge .On admet que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$.

2) Montrer la convergence des deux séries $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)$ et calculer leurs sommes respectives.

3) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{4x^3 - x}$.

4) Montrer la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3 - k}$ et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.

5) L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4x^3 - x}$ converge t-elle ? Si oui, la calculer.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ donné et $u_{n+1} = u_n - {u_n}^2$. Montrer que cette suite converge et en donner la limite. Montrer que la série de terme général ${u_n}^2$ converge et en donner la limite. Montrer que les séries de terme généraux u_n et $\ln(u_{n+1}/u_n)$ divergent.

Exercice 12

En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
- GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
- ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
- AC : celles qui convergent absolument ;
- SC : celles qui convergent, mais non absolument.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{n})\right]$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (1 - \frac{1}{n})^n\right)$ **7)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1000}{3^n + 1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n) \sin(\frac{\pi}{n})$

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{1}{3^{n-k}}\right)$

Exercice 13

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 14

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs tel qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour n voisin de $+\infty$, on aie :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

et $\beta > 1$. on pose $V_n = n^\alpha u_n$

1. Donner un développement asymptotique de $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ pour n voisin de $+\infty$ et en déduire que la suite (V_n) est convergente
2. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Exercice 15

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $n \geq 2$.

1. Démontrer que si $\alpha > 0$ alors la série $\sum u_n$ est convergente et si $\alpha < 1$ la série $\sum u_n$ est divergente.
2. On suppose que $\alpha = 1$. prouver que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$
3. Donner un résumé concernant ces série (appelées series de Bertrand)