Exercice 1:
Les matrices suivantes sont-elles diagonalisable ? si oui diagonaliser les :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2:
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$$

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable. Est elle trigonalisable ?

Exercice 3:
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A_m
2. Prouver que A_m est diagonalisable et exhiber une base de vecteurs propres.
3. Calculer le rang de A_m en discutant suivant m.
4. pour quelles valeurs de m la matrice A_m est inversible ? Déterminer alors son inverse
5. On suppose que A_m n'est pas inversible. Déterminer le noyau et l'image de f_m, l'endomorphisme canoniquement associé à A_m.

Exercice 4:
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 5:

1. Soient f et g deux endomorphisme s d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que

$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$

2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
   Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   – Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
   – Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Exercice 6:
Soient $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. avec :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice$A$.

1. En examinant la matrice A, trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A, puis deux sous-espaces $f-$stables.
2. Que représente la matrice B ?

Exercice 7:
Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Sans le moindre calcul, justifier que M est diagonalisable
2. Diagonaliser M

Exercice 8:
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que tout projecteur de E est diagonalisable
2. Montrer que toute symétrie de E est diagonalisable
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe deux scalaires distincts a et b tel que
$$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = O$$
prouver que f est diagonalisable.
4. Retrouver les résultats des questions 1) et 2) en utilisant la question 3)
5. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit J_n la matrice de taille n dont tous les termes valent 1. Montrer que J_n est diagonalisable

Exercice 9:
Soit$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Notre objectif est de determiner le rang de A suivant les valeurs de a, b et c.

1. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Determiner ses valeurs propres.
2. Calculer J^2 et exprimer A comme combinaison linéaire de I, J et J^2
3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Determiner ses valeurs propres.
4. Montrer que si $j = \exp \dfrac{2i\pi}{3}$ alors $j^2 = \bar{j} = -1 - j$
5. En déduire le rang de A en discutant suivant des cas précis.

Exercice 10:
Le long de cet exercice on identifiera une matrice carrée M et son endomorphisme canoniquement associé. On notera Mx l'image de x par M.
On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
En effectuant le moins de calculs possible,

1. montrer que : $\{0\} \subset \ker A \subset \ker A^2 \subset \ker A^3 = \mathbb{R}^4$
et déterminer les dimensions respectives de $\ker A$ et $\ker A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \ker A^2 \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1 \in \ker A^2$, et que $\ker A^2 = \ker A \oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1 \in \ker A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\ker A = \mathrm{Vect}(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$,
6. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Calculer $P^{-1}AP$.

Refaire le même travail pour les matrices B et C