# SERIE NO 06

# CALCUL DE DETERMINANT

**Exercice 1:**

$a, b$ et $c$ étant des nombres complexes quelconques, calculer les determinants suivants :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

**Exercice 2:**

$a, b, c$ et $d$ étant des elements de $\mathbb{K}$, calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$

**Exercice 3:**

$a, b, c$ et $d$ étant des nombres réels quelconques , on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice ${}^t AA$.
2. En déduire $\det A$
3. Montrer que pour tous $x, y, z, t, x', y', z', t' \in \mathbb{R}$, il existe $x'', y'', z'', t'' \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)(x'^2+y'^2+z'^2+t'^2) = x''^2+y''^2+z''^2+t''^2$$

**Exercice 4:**

$a$ et $b$ étant deux éléments quelconques de $\mathbb{K}$ , on considère le determinant $\Delta_n$ suivant ($n$ lignes et $n$ colonnes) :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

1. Etablir la relation $\Delta_n = (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 4$
2. En déduire une expression de $\Delta_n$ ne fonction de $a$ et $b$ et $n$

**Exercice 5:**

$a_1, ..., a_n$ étant des éléments de $\mathbb{K}$, calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & \ddots & a_2 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 6:**

On pose pour tout $x \in \mathbb{K}$ ;

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

où $a, b, \lambda_1, ..., \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

1. Prouver que $D_n$ est une fonction affine de $x$
2. calculer $D_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$ et en déduire $D_n(0)$