Exercice 1:
Soit E un $\mathbb{K}-$ ev et U, V, W des sous-espaces vectoriels de E tel que $U \subset V \cup W$. Démontrer que $U \subset V$ ou $U \subset W$.

Exercice 2:
Soit le $\mathbb{R}-$ev $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer que la famille $(f_a)_{a \in I}$ est libre dans chacun des cas suivants :

1. $f_a(x) = e^{ax}$, I une partie non vide quelconque de $\mathbb{R}$
2. $f_a(x) = |x - a|$, I une partie non vide de $\mathbb{R}$
3. $f_a(x) = \cos ax$, $I = \mathbb{N}$,
4. $f_a(x) = \sin ax$, $I = \mathbb{N}^*$
5. $f_a(x) = \cos(x + a)$, $I = \{1, 2\}$

Exercice 3:

1. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et soit $\mathcal{B} = (B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes tel que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad d^o(P_k) = k$. Prouver que la famille $\mathcal{B}$ est une base de E
2. En déduire que si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes tel que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad d^o(P_k) < d^o(P_{k+1}$ alors la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre .
3. Identifier Vect$(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants :
   (a) $P_k = X^{2k}$
   (b) $P_k = X^{2k+1}$
4. Soit $a \in \mathbb{K}$
   (a) Verifier que $((X - a)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de E. Exprimer les coordonnée d'un polynôme P dans cette base
   (b) Identifier le sous espace vectoriel de E engendré par la famille $((X - a)^k)_{k \in I}$ où I est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Exercice 4:
Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$. On rappelle que si $p \in E$ alors a est une racine de P d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $(X - a)^m | P$ et $(X - a)^{m+1} \not| P$
Pour tout polynôme P on pose $\phi_a(P) = 0$ si a n'est pas une racine de P et si a est une racine de P et $P \neq 0$ alors , $\phi_a(P)$ est l'ordre de multiplicité de a. Finalement, on convient de poser $\phi_a(0) = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq +\infty$. On définit : $F_p = \{P \in E / \phi_a(P) = p\}$ et $G_p = \{P \in E / \phi_a(P) \geq p\}$.

1. Est ce que F_p est un sous-espace vectoriel de E ? justifier soigneusement la réponse .
2. Prouver que G_p est un sous-espace vectoriel de E
3. Donner une famille génératrice simple de G_p en justifiant bien votre choix .
4. Donner un supplémentaire de G_p

Exercice 5:
On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Vect$\{v_1, v_2\}$ et Vect$\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour Vect$\{v_1, v_3, v_4\}$ et Vect$\{v_2, v_5\}$.

Exercice 6:

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que $G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

Exercice 7:
Soient U, V, W des s.e.v. d'un e.v. E, vérifiant $(I) : U \cap V = \{0\} = (U+V) \cap W$.

1. Démontrer que $V \cap W = \{0\} = U \cap (V+W)$.
2. Montrer que (I) équivaut à
   $(II) : (\forall x \in U+V+W)(\exists!(u,v,w) \in U \times V \times W)(x = u+v+w)$.

Exercice 8:
Soit E un $\mathbb{K}-$ev et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et soit $F_1, ..., F_n$ des sous(espaces vectoriels de E. Démontrer que la somme $F_1 + ... + F_n$ est directe si et seulement si pour tout $k \in \{2, ..., n\}$ on a $F_k \cap (F_1 + ... + F_{k-1}) = \{0\}$

Exercice 9:
Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 10:
On considère dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

1. Prouver qu'il existe des matrices de transvection $T_1, ..., T_n$ et $T'_1, ..., T'_m$ tel que : la matrice TAT' est de la forme : $TAT' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ où $T = \prod_{k=1}^{n} T_k$ et $T' = \prod_{k=1}^{m} T'_k$ et a, b, c et d des nombres réels.
2. Reprendre la question précédents pour la matrice B
3. Montrer chacune des matrices A et B peut se mettre sous la forme :
   $$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} F$$
   avec E et F sont des produits de matrices de transvections et d un nombre réel non nul.

Exercice 11:
Calculer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12:
Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Montrer que A^k est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n.

3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice dont tous les coefficients valent 1, avec $n \geq 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)\,A + (n-1)\,I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2, et retrouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2).