Exercice 1:
nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\cos(\frac{\pi x}{2})} dx$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}} dx$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^4-x+3}{x^4+x^2+1} dx$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{2x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} dx$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} dx$

Exercice 2:
Calculer les valeurs des intégrales suivantes après avoir prouvé qu'elles convergent :

1) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ (a réel > 0)

2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$

3) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

4) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} dx$

Exercice 3:
Quelle est la nature de chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\cos(t^2)}{e^t-1}$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt$

Exercice 4:

1. Montrer que l'integrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt$ converge et que $I = \frac{1}{4}$
2. Montrer que l'integrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge et que $J = 0$

Exercice 5:

1. Etablir la convergence des intégrales : $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$
2. les calculer

Exercice 6:

1. Nature suivant α de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-\cos t)^\alpha} dt$.
2. Nature suivant α de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} (t-1)^\alpha e^{-xt^2} dt$
3. Montrer que l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{2}{3}}}$ converge.

Exercice 7:

1. On admet que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ Calculer chacune des intégrales suivantes :
   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx$
   (b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$
   (c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}$
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente

Exercice 8:
Soit f une fonction continue et bornée sur un intervalle $]a,b]$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

1. Peut on dire que f est prolongeable par continuité au point a à droite ? Justifier votre réponse
2. Prouver que f est integrable sur $]a,b]$

PROBLEME

Partie I

Soit E le $\mathbb{R}$ ev des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que l'integrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge. Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^1 f^2(t)dt$ converge.

1. Montrer $F \subset E$ (on pourra remarque que pour tout réel t on a $\forall x \in]0,1] \quad (t+|f(x)|)^2 \geq 0$. En déduire que F posséde une structure de $\mathbb{R}$ ev.
2. Soit $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}, \alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α , f est- elle un élément de E ? de F ?
3. Soit : $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha}, \alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α , f est- elle un élément de E ? de F ?
4. Soit $f:]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\ln t)^n$, $n \in \mathbb{N}$. f est-elle élément de E ? de F ?

Partie II

Soit G le $\mathbb{R}-$ ev des applications f continues sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

1. Soit $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{1}{t}$.
   f est elle élément de G ? Si oui, calculer $I = \int_0^1 f(t)$
2. Soit $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}$
   (a) Montrer que $f \in G$
   (b) Calculer $I = \int_0^1 f(t)dt$
3. Soit $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{((\ln t)^n}{(1-t)^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$
   (a) A quelles conditions sur n et α on a $f \in G$?
   (b) Calculer $I = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$
4. Soit $f_\alpha:]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(t) = \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) Determiner l'ensemble $U = \{\alpha \in \mathbb{R}/f_\alpha \in G\}$
   (b) Soit $\alpha \in U$, on pose $I_\alpha(x) = \int_0^x f_\alpha(t)dt$. Montrer que :
   $$I_\alpha(x) = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln u}du$$
   (c) En déduire la valeur de $I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(t)dt$