

**Exercice 1.** Calculer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous dans des intervalles à préciser :

1.  $x \mapsto e^{\sin^2 x} \sin 2x.$

2.  $t \mapsto \cos^5 t$

3.  $t \mapsto \operatorname{ch}^3 t$

4.  $t \mapsto \cos^4 t$

5.  $t \mapsto \operatorname{sh}^4 t.$

6.  $x \mapsto x^3 e^x.$

7.  $x \mapsto \ln x$

8.  $x \mapsto x \ln x$

9.  $x \mapsto \arcsin x.$

10.  $t \mapsto \operatorname{cht} \sin t.$

11.  $x \mapsto \frac{1}{\sin x}.$

12.  $x \mapsto \sqrt{a^2 - x^2}.$

13.  $x \mapsto \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}}.$

14.  $x \mapsto e^{ax} \cos bx$

15.  $x \mapsto e^{ax} \sin bx.$

16.  $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}$

17.  $x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

18.  $x \mapsto \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3}.$

19.  $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3 - x^3}}$

20.  $x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}.$

21.  $x \mapsto x^k \ln x$

22.  $x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}$

23.  $x \mapsto \ln(1+x^2)$

24.  $x \mapsto \frac{x^2+a}{x^2+1} \operatorname{Arctan} x$

25.  $x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{1/x}$

26.  $x \mapsto \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$

27.  $x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}$

28.  $x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}$

29.  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$

30.  $x \mapsto 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1}$

31.  $x \mapsto \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$

32.  $x \mapsto e^{\operatorname{Arcsin} x}$

33.  $x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{2x} \cos x$

34.  $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$

35.  $x \mapsto \frac{x}{\cos^2 x}$

36.  $x \mapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 - \tan^2 x}$

37.  $x \mapsto \frac{\sin ax + \cos bx}{e^x}$

38.  $x \mapsto \frac{x(2 + \cos x)}{\sin^2 x}$

39.  $x \mapsto \operatorname{ch} x \sin(2x)$

40.  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2 + \tan^2 x}}$

41.  $x \mapsto (x^2 + 2x + 2) \cos(2x)$

42.  $x \mapsto x^2 \cos x$

43.  $x \mapsto x^2 \sin x$

44.  $x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^3}$

45.  $x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$

46.  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$

47.  $t \mapsto t^2 \exp(t^3),$

48.  $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{1 + \cos^2 t'}$

49.  $t \mapsto \frac{t}{1 - t^2 + 2\sqrt{1-t^2}}$

50.  $t \mapsto \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{cht}}$

51.  $t \mapsto \frac{\cos t}{\cos 2t}$

52.  $t \mapsto \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 t}$

53.  $t \mapsto \frac{\sin t}{\sin^2 t - \cos t}$

54.  $t \mapsto \frac{t^2}{(\cos t + t \sin t)^2}$

55.  $t \mapsto \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}$

56.  $t \mapsto \frac{1}{t^8 + t^4 + 1}$

57.  $t \mapsto \tan t,$

58.  $t \mapsto \operatorname{arg} \operatorname{sh} t$

59.  $t \mapsto \frac{\tan^3 t}{\cos^6 t}$

60.  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}}$

61.  $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t} + \sqrt{t+2}}$

62.  $t \mapsto t \sqrt[4]{1+t}$

63.  $t \mapsto \operatorname{ch}^3 t$

64.  $t \mapsto \frac{t^3}{(a^2 - t^2)^{3/2}}$

65.  $t \mapsto \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{t}}}{\sqrt{t}}$

66.  $t \mapsto \sqrt{t} \sqrt{t} \sqrt{t},$

67.  $t \mapsto \frac{1}{t^2} \sqrt[4]{t+1}$

68.  $x \mapsto \operatorname{arctan} x$

69.  $x \mapsto \tan^2 x$

70.  $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

71.  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

72.  $x \mapsto \arcsin x$

73.  $x \mapsto \frac{1}{3 + e^x}$

74.  $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{4x - x^2}}$

75.  $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

$$76. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

$$77. x \mapsto \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$78. x \mapsto \frac{x+2}{x^2-3x-4}$$

$$79. x \mapsto \cos xe^x$$

$$80. x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$$

$$81. x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$$

$$82. x \mapsto \operatorname{Arctan} x$$

$$83. x \mapsto \operatorname{Arccos}$$

$$84. x \mapsto \operatorname{Argsh} x$$

$$85. x \mapsto \operatorname{Argch} x$$

$$86. x \mapsto \operatorname{Argth} x$$

$$87. x \mapsto \ln(1+x^2)$$

$$88. x \mapsto e^{\operatorname{Arccos} x}$$

$$89. x \mapsto \cos x \ln(1+\cos x)$$

$$90. x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}}$$

$$91. x \mapsto \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$$92. x \mapsto \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x$$

$$93. x \mapsto x^n \ln x \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

$$94. x \mapsto e^{ax} \cos(ax) \text{ avec } ((a, a) \in (\mathbb{R}^*)^2)$$

$$95. x \mapsto \sin(\ln x)$$

$$96. x \mapsto \cos(\ln x)$$

$$97. x \mapsto \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}$$

$$98. x \mapsto x^2 e^x \sin x$$

$$99. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$100. x \mapsto \sqrt{x^2+2x+5}$$

$$101. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$102. x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$$

$$103. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$104. x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$105. x \mapsto \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$$

$$106. x \mapsto \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$107. x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

$$108. x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$$

$$109. x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

$$110. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}$$

$$111. x \mapsto \frac{1}{\cos x}$$

$$112. x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$113. x \mapsto \frac{1}{\sin x}$$

$$114. x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

$$115. x \mapsto \frac{1}{\tan x}$$

$$116. x \mapsto \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

$$117. x \mapsto \frac{\sin^2(x/2)}{x - \sin x}$$

$$118. x \mapsto \frac{1}{2 + \sin^2 x \cos x}$$

$$119. x \mapsto \frac{1}{\cos x + \sin x \cos(3x)}$$

$$120. x \mapsto \frac{1}{\sin x + \sin(3x)}$$

$$121. x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x \sin x \sin(2x)}$$

$$122. x \mapsto \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1 \tan x}$$

$$123. x \mapsto \frac{1}{1 + \sin(3x) \cos x + 2 \sin x \sin x - \cos x}$$

$$124. x \mapsto \frac{\sin x}{\cos(3x)}$$

$$125. x \mapsto \frac{1}{\alpha \cos^2 x + \beta \sin^2 x}$$

$$126. x \mapsto \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1 + \operatorname{sh} x}$$

$$128. x \mapsto \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$$

$$129. x \mapsto \frac{\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{ch} x}$$

$$130. x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}$$

$$131. x \mapsto \frac{1}{1 - \operatorname{ch} x}$$

$$132. x \mapsto \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$133. x \mapsto \frac{x^2}{x^3 + 1}$$

$$134. x \mapsto \frac{x^5}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$135. x \mapsto \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}$$

$$136. x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

$$137. x \mapsto \frac{x^2+x}{x^6+1}$$

$$138. x \mapsto \frac{1}{x^4+1}$$

$$139. x \mapsto \frac{1}{(x^4+1)^2}$$

$$140. x \mapsto \frac{1}{x^8+x^4+1}$$

$$141. x \mapsto \frac{x}{(x^4+1)^3}$$

$$142. x \mapsto \frac{1}{(x+1)^7 - x^7 - 1}$$

$$143. x \mapsto t^7 \operatorname{Arctan} t$$

$$144. x \mapsto \frac{4x}{(x-2)^2}$$

$$145. x \mapsto \frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$$

$$146. x \mapsto \frac{a \sin x}{\cos x \sqrt{\cos^2 x - a^2 \sin^2 x}}$$

$$147. x \mapsto \frac{1}{\sin x \sqrt{\sin x(1+\sin x)}}$$

$$148. x \mapsto \frac{1}{\cos x \cos(2x)}$$

$$149. x \mapsto \frac{1}{\sin x + \sin(2x)}$$

$$150. x \mapsto \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$



**Exercice 2.** Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}$$

$$2. \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan x$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x$$

$$4. \int_{-1}^1 (\arccos x)^2$$

$$5. \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$6. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$7. \int_1^2 x^2 \ln x$$

$$8. \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7}$$

$$9. \int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}$$

**Exercice 3.** Soient  $I = \int_0^\pi x \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^\pi x \sin^2 x dx$ .

1. Calculer  $I$  et  $I + J$ .
2. En déduire  $J$ .

**Exercice 4.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

1. Établir une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .
2. En déduire  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$ .
3. Montrer que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et strictement positive.
4. Montrer que  $I_n \sim I_{n+1}$ .
5. Calculer  $n I_n I_{n+1}$ .
6. Donner alors un équivalent simple de  $I_n$ .

**Exercice 5.** Soit  $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ .

1. Calculer  $a_0, \dots, a_4$ .
2. Étudier la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 6.** Étudier la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}} dt$ .

**Exercice 7.** Pour  $x$  réel, on pose  $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est impaire et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' + 2xy = 1$ .
3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1$ .

4. Soit  $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$ . Montrer que  $g$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$  et que  $g$  admet sur  $]0, +\infty[$  un unique zéro noté  $x_0$  vérifiant de plus  $0 < x_0 < 1$ .
5. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

**Exercice 8.** Soit  $f(t) = \frac{t^2}{e^t - 1}$  si  $t \neq 0$  et  $0$  si  $t = 0$ .

1. Vérifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ . Montrer que  $F$  a une limite réelle  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. Prouver que  $\ell = 2L$  où :  $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ .

**Exercice 9.** Pour tous  $n, p$  dans  $\mathbb{N}$ , on définit

$$J_{n,p} = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^p t dt.$$

Trouver des relations de récurrence liant  $J_{n,p}$  et  $J_{n,p-2}$ , ainsi que  $J_{n,p}$  et  $J_{n-2,p}$ . En déduire la valeur de  $J_{n,p}$ .

**Exercice 10.** Soit  $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  fixé.

1. Montrer l'égalité :

$$\int_0^\alpha \ln(\cos x) dx = \int_0^\alpha \ln(\cos(\alpha - x)) dx$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \ln(1 + \tan \alpha \tan x) dx$$

3. Application : Calculer  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$