**EXERCICE 1**
$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un singleton.L'espace $\mathbb{R}^3$ est supposé orienté.Soient $f_1, f_2$ et $f_3$ trois fonctions vectorielles de classe $C^1$ tel que pour tout $t \in I$ la famille $\mathcal{B}_t = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ est une base orthonormale directe. Soit $M_t$ la matrice de la famille $(f_1'(t), f_2'(t), f_2'(t))$ relativement à la base $\mathcal{B}_t$.

1. Montrer que la matrice $M_t$ est antisymétrique.
2. En déduire qu'il existe un vecteur $\Omega(t)$ tel que :$f_k'(t) = \Omega(t) \wedge f_k(t)$ pour tout $k = 1, 2, 3$
3. On suppose que les $f_k, k \in \{1, 2, 3\}$ sont de classe $C^2$. Prouver que $\Omega$ est de classe $C^1$ et calculer $f_k''$ en fonction de $\Omega, \Omega'$ et $f_k$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$

**EXERCICE 2**
$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un singleton .L'espace $\mathbb{R}^3$ est supposé orienté. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$ une fonction de classe $C^2$ tel que pour tout $t \in I$ les vecteurs $f(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires (mouvement à acceleration centrale). On note $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$.

1. Montrer que la fonction $\sigma$ ainsi définie est constante sur $I$
2. Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(f(t_0), f'(t_0))$ est libre alors $f(I)$ est inclus dans un plan (mouvement à trajectoire plane).

**EXERCICE 3**
$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$ de classe $C^1$ tel que pour tout $t \in I$ on aie : $f(t) \neq 0$ et la famille $(f(t), f'(t))$ est liée. On pose alors $g(t) = \dfrac{1}{\|f(t)\|} f(t)$ pour tout $t \in I$.

1. Montrer que $g$ est de classe $C^1$ sur $I$ et que , pour tout $t \in I$ on a : $g'(t)$ est à la fois colinéaire et orthogonal à $g(t)$.
2. En déduire que $f(t)$ a une direction constante.
3. Chercher un contre exemple lorsqu'on n'a pas la condition : $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$

**EXERCICE 4**
L'objet de cet exercice est de donner des exemples d'applications admettant un dl au voisinage de 0 sans être au moins deux fois dérivables en 0.Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynômiale de degré $n$. On considère l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} P(x) + x^{n+1} \sin \dfrac{1}{x^n} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a_0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$
   (a) Donner un dl de $f(x)$ au voisinage de 0
   (b) Prouver que $f$ n'est pas deux fois derivable
2. Soit $f$ la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin(e^{\frac{1}{x^2}}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0. Qu'en déduit on ?
   (b) Montrer que $f$ n'est pas deux fois derivable en 0

**EXERCICE 5**
On considère la fonction $f$ définie sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$
Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $I$

**EXERCICE 6**
Donner un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 de la fonction vectorielle $f$ pour chacun des cas ci-dessous :

1. $f(t) = (\cos(\sin t), \sin(e^t - 1))$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et $n = 5$
2. $f(t) = (t^3 + \dfrac{1}{t+1}, \ln(1 + t^2) - \cos(t^2), e^{1-\cos t})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $n = 4$
3. $f(t) = (\tan t, \mathrm{th}(t^2), \sqrt{1 + t^2})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et $n = 2$