Exercice 1:

1. Montrer que l'application N définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^+$ par : $N(x,y) = |x| + 2|y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est une norme. Tracer soigneusement la sphère unité associée à cette norme.
2. Même question pour : $n(x,y) = \sqrt{2x^2+y^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2:
Montrer que les seules normes de $\mathbb{R}$ sont de la forme : $N(x) = k|x|$ où k est une constante réelle strictement positive.

Exercice 3:

1. Montrer que la somme de deux normes de $\mathbb{R}^d$ est une norme de $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que si N désigne l'une des normes : $N_1 = \|.\|_1 + \|.\|_2$, $N_2 = \|.\|_1 + \|.\|_\infty$, $N_3 = \|.\|_2 + \|.\|_\infty$ alors la sphère unité de N est symétrique par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées ainsi que par rapport à la premiere bissectrice.
3. En déduire un tracé des sphères unités S_1, S_2, S_3 respectives de ces trois normes.

Exercice 4:
Montrer que si N et N' sont deux normes parmi les trois normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ alors Toute boule ouverte non vide de l'une en contain une non vide de l'autre.

Exercice 5:

1. Pour tout $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :$\|X\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t^2}$.
   Prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
2. Dessiner la sphère unité associée à cette norme

Exercice 6:

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ tel que f est bijectif et $\|.\|$ une norme de $\mathbb{R}^d$. Prouver que $N(x) = \|f(x)\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ définit une norme sur $\mathbb{R}^d$.
2. Application : sous-quelle condition sur les nombres réels a, b, c et d la relation : $N(X) = \sqrt{(ax+cy)^2 + (bx+dy)^2}$ avec $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ définit elle une norme N sur $\mathbb{R}^2$?
3. Montrer que la relation : $\|X\| = \sqrt{(x+y)^2 + (x-2y)^2}$ pour $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7:

1. Montrer que si deux normes de $\mathbb{R}^d$ ont les mêmes boules unités fermées alors ces deux normes sont égales
2. Montrer que si deux normes de $\mathbb{R}^d$ ont les mêmes boules unités ouvertes alors ces deux normes sont égales
3. Montrer que si deux normes de $\mathbb{R}^d$ ont les mêmes sphères unités fermées alors ces deux normes sont égales

Exercice 8:

1. Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une application de I vers $\mathbb{R}$ continue sur I et soit $F = \{x \in I / f(x) = 0\}$. Montrer que F est un fermé de $(\mathbb{R}, |.|)$.

2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} & x = 0 \end{cases}$$

   (a) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x = \frac{1}{n}$$

   (c) En déduire que l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

3. Prouver par une autre méthode que $A = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

4. Montrer que $B = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$

Exercice 9:
Montrer que , dans $\mathbb{R}^2$, la partie A est un ouvert dans les cas suivants :

1. $A =]0, 1[\times]0, 3[$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 2\}$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < 3x^2 + 5y^2 < 5\}$

Exercice 10:

1. Montrer que les parties suivantes sont des ouverts de $\mathbb{R}$: $]0, 1[$, $]0, 1[\cup]5, +\infty[$
2. Montrer que $F = \{(t, \sin t) / t \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$
3. Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$
4. Montrer que $W = \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$

Exercice 11:

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha = \sup(A)$. Prouver que α est un point adhérent de A
2. Donner un résultat similaire au cas où A est non vide minorée
3. Montrer que si A est une partie non vide fermée et majorée de $\mathbb{R}$ alors A admet un plus grand élément. Donner un résultat similaire pour les parties non vides minorées et fermées de $\mathbb{R}$

Exercice 12:
On considère une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et on suppose que (u_n) converge de limite $\ell \in \mathbb{R}^d$. Soit $V = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ et $F = V \cup \{\ell\}$

1. Prouver que F est un fermé de $\mathbb{R}^d$
2. Est il possible que $\ell \in V$? Si oui donner un exemple
3. Comment se comporte la suite (u_n) au cas où $\ell \in V$?