NAPPES PARAMETREES ET SURFACE

26 avril 2011

Dans tout ce qui suit , on considére $\mathbb{R}^3$ muni de
son produit scalire usuel qui fait de sa base canonique une base orthonormale et on choisit 'orienter $\mathbb{R}^3$ de sorte que sa base canonique est directe. On rappelle que le déterminant d'une famille (u_1, u_2, u_3) de vecteurs par rapport à une BON ne dépends pas de celle-ci et on le notera : $\det(u_1, u_2, u_3)$.

1 Surface, Nappe paramétrée

1.1 Surface

une surface de $\mathbb{R}^3$ est un sous-esemble (S) de $\mathbb{R}^3$ formés de ponts $m = (x, y, z)$ dont les coordonnées sont liées par une relation de la forme :

$$F(x, y, z) = 0$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ suffisament régulière ; ou généralement une relation

$$\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

où ϕ, ψ et χ sont des applications suffisament régulière d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

1.2 Nappe paramétrée

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une nappe paramétrée de calsse C^k est un couple (U, f) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U vers $\mathbb{R}^3$ de classe C^k. Le sous-ensemble $(S) = f(U)$ de $\mathbb{R}^3$ s'appelle le support de la nappe. Le support d'une nappe est donc une surface de $\mathbb{R}^3$. On dit aussi que (U, f) est un paramétrage de (S). Une surface peut avoir plusieurs paramétrages.
Par exemple, pour :

$$U =]-\pi, \pi[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

et pour $(\theta, \varphi) \in U$;

$$f(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$$

correspond à la nappe dont le support est la sphère unité privé de quelques parties (à préciser par le lecteur). On reconnaît ici le paramétrage à l'aide des coordonnées sphériques $(1, \theta, \varphi)$: le rayon est constant.

Definition 1 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$.Soit (U, f) une nappe paramétrée de calsse C^k et soit (S) son support. Un point $m = f(u, v)$ de (S) est dit régulier si la famille des vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ est libre. La plan passant par m et dirigé par ces vecteurs s'appelle le plan tangent à (S) au point m. C'est le plan : $(P) = m + Vect\left\{\dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v), \dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right\}$. Tout vecteur normal à (P) s'appelle vecteur normal (S) au point m.*

Remarque 1 *Si $m = f(u, v)$ est un point régulier de (S) alors $n(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ est un vecteur normal de (S) au point m.*

Remarque 2 *Si tous les points de (S) sont réguliers , on dit que la nappe (U, f) est réguliére. On dit aussi que (S) est régulière.*

2 Surface d'équation $z = f(x, y)$

Théorème 1 *Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ et soit (S) la surface dont $z = f(x, y)$ est une équation cartésienne. La nappe paramétrée (U, g) avec $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$ pour tout $(x, y) \in U$ est une nappe régulière de support (S). Si F est l'application de $V = U \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ alors $F(x, y, z) = 0$ est une équation cartésiénne de (S) et pour tout $(x, y) \in U$, le vecteur $n(x, y) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}F(x, y, f(x, y))$ est un vecteur normal à (S) au point $m = g(x, y)$*

Preuve : Soit $(x, y) \in U$, alors : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = (1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y))$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ donc :

$$n(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), 1) \neq 0$$

donc le point $m = g(x, y)$ est régulier.
remarquons que de $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ on déduit que :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y); \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -1$$

de sorte que :

$$n(x, y) = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}F(x, y, f(x, y))$$

et par suite $\overrightarrow{\mathbf{grad}}F(x, y, f(x, y))$ est un vecteur normal à (S) au point $m = g(x, y)$

3 Surface d'équation $F(x, y, z) = 0$

3.1 Théorème des fonctions implicites

L'équation cartésienne $z = f(x, y)$ n'est qu'un cas particulier de l'équation $F(x, y, z) = 0$. Le théorème des fonctions implicites dont on donnera l'énoncé et on l'admettera nous permet de voir que si une telle surface posséde un point régulier alors elle localement régulière au voisinage de ce point .

Théorème 2 *Soit $f : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de calsse C^1 d'un ouvert W de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Soit $m_0 = (a, b, c) \in W$ tel que*

$$\begin{cases} f(m_0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(m_0) \neq 0 \end{cases}$$

Alors : Il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} U \times I \subset W \\ \\ (\forall m \in U \times I) \quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(m) \neq 0 \end{cases}$$

et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que : $\varphi(U) \subset I$ et :

$$(\forall((x, y), z) \in U \times I) \quad f(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y)$$

De plus on a :

$$\forall (x, y) \in U \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \end{cases}$$

Remarque 3 *Dans ce théorème on a confondu les triplets (x, y, z) et les couples $((x, y), z)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in \mathbb{R}$*

3.2 Conséquence

Si (S) est une surface dont $F(x, y, z) = 0$ est une équation cartésienne avec F de classe C^1 sur un ouvert W de $\mathbb{R}^3$ alors si m_0 est un pont régulier de (S) alors (S) est régulière localement au voisinage de m_0

3.3 Un exemple

$W = \mathbb{R}^3$ et $f(x, y, z) = xz^3 - x^2y - yz - y + 2$ et soit (S) la surface dont une équation cartésienne est $f(x, y, z) = 0$, et soit $m_0 = (0, 1, 1)$. Comme $f(m_0) = 0$ on a $m_0 \in (S)$. On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z^3 - 2xy; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -x^2 - z - 1; \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3xz^2 - y;$$

de sorte que : $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0, 1, 1) = -1 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites assure donc l'existence d'une fonction g de classe C^1 définie sur un ouvert U tel que $(0, 1) \in U$ et un intervalle ouvert I tel que pour tout $(x, y) \in U$ et $z \in I$ on aie : $f(x, y, z) = 0 \iff z = g(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$.
Qeul est le plan tangent au point m_0 à la surface (S) ? On sait que se plan passe par m_0. Il suffit donc d'en donner un vecteur normal. On sait $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(m_0)$ est un vecteur normal à (S) au point m_0. En vertu des formules ci-dessus donnat les dérivée partielles de f, on a

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(m_0) = (1, -2, -1)$$

Le plan tangent à (S) a donc une équation de la forme :

$$(P) : x - 2y - z + c = 0$$

Tenant compte de $m_0 \in (P)$ on a : $c = 3$, donc :

$$(P) : x - 2y - z - 3 = 0$$

Remarquons que le fonction g existe mais on ne peut pas dans cet exemple expliciter $g(x, y)$ en fonction de x et y. Cependant , il est possible de calculer par exemple $\dfrac{\partial g}{\partial x}(m_0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(m_0)$, il suffit d'appliquer les formules données à la fin de l'énoncé du théorème :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(m_0) = -\frac{1}{-1} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(m_0) = -\frac{-2}{-1} = -2$$

4 Des surfaces particulières

4.1 Cylindre

4.1.1 Définition

Un cylindre est la réunion de toutes les droites passant par un point d'un courbe donnée et de direction constante donnée.

Definition 2 *On se donne une courbe paramétrées* $\Gamma = (I, g)$ *et un vecteur non nul* $u = (a, b, c)$ *Alors La nappe cylindrique de directrice* Γ *et de direction* u *est la nappe* $(I \times \mathbb{R}, f)$ *avec :*

$$\forall (t, t') \in I \times \mathbb{R} \quad f(t, t') = g(t) + t'u$$

soit :

$$\begin{cases} x(t) = g_1(t) + t'a \\ y(t) = g_2(t) + t'b \\ z(t) = g_3(t) + t'c \end{cases}$$

où g_1, g_2 *et* g_3 *sont les fonctions coordonnées de* g.

4.1.2 Exemple

Si $\Gamma = ([0, 2\pi], g)$ avec $g_1(t) = \cos t, g_2(t) = \sin t, g_3(t) = 0$ (cercle de centre O et de rayon 1 et $u = (0, 0, 1)$, le cylindre associé a la paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t' \end{cases}$$

4.2 Cône

4.2.1 Definition

Un cône est la réunion de droites passant par un point fixe A et un point variable m décrivant le support d'une courbe paramétrée. Une nappe conique est une nappe paramétrée dont le support est un cône. On donne la définition suivante :

Definition 3 *Etant donnée une courbe paramétrée* $\Gamma = (I, g)$ *et un point* $A = (a, b, c)$ *de* $\mathbb{R}^3$. *On appelle nappe conqiue de somment* A *et de génératrice* Γ *le nappe paramétrée* $(I \times \mathbb{R}, f)$ *tel que :*

$$\forall (t, t') \in I \times \mathbb{R} \quad f(t, t') = A + t'(g(t) - \overrightarrow{OA}) = A + t'h(t)$$

où $h(t) = g(t) - \overrightarrow{OA}$, *donc* (I, h) *est un arc paramétré obtenu par translation de* (I, g), *ce qui donne la paramétrisation :*

$$\begin{cases} x(t) = a + t'h_1(t) \\ y(t) = b + t'h_2(t) \\ z(t) = c + t'h_3(t) \end{cases}$$

4.2.2 Exemple

Si $A = O$ et $I = [0, 2\pi]$ et $g(t) = (\cos t, \sin t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on obtient :

$$\begin{cases} x(t, t') = t' \cos t \\ y(t, t') = t' \sin t \\ z(t, t') = t' \end{cases}$$

On peut remarquer que : $x^2 + y^2 = z^2$ est une équation cartésienne de ce cône.

4.3 Surface de révolution

4.3.1 Definition

Definition 4 *On appelle nappe de révolution toute nappe paramétrée* $(I \times \mathbb{R}, f)$*tel qu'il existe un repère orthonormal* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *tel que :*

$$(\forall (t,\theta) \in I \times \mathbb{R}) \quad f(t,\theta) = O + \rho(t)\overrightarrow{u}(\theta) + z(t)\overrightarrow{k}$$

où , pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ *on a* $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j}$

4.3.2 Exemples

1. si $O = (0,0,0)$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est la base canonique et $\rho(t) = R$ avec $R > 0$ et $z(t) = t$ on a :

   $$f(t,\theta) = t\overrightarrow{u}(\theta) + R\overrightarrow{k}$$

   Il s'agit d'un cylindre de révolution de rayons R. Paramétrage :

   $$\begin{cases} x(t,\theta) = R\cos\theta \\ y(t,\theta) = R\sin\theta \\ z(t,\theta) = t \end{cases}$$

2. Avec les même donnée si $\rho(t) = z(t) = t$ on a :

   $$f(t,\theta) = t\overrightarrow{u}(\theta) + t\overrightarrow{k}$$

   Il s'agit d'un cône de révolution autour de l'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$. Paramétrage :

   $$\begin{cases} x(t,\theta) = t\cos\theta \\ y(t,\theta) = t\sin\theta \\ z(t,\theta) = t \end{cases}$$