ISOMETRIES AFFINES

14 mai 2011

1 Introduction

Dans tout ce qui suit d vaut 2 ou 3 $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $\mathbb{R}^d$ peuvent être des points comme ils peuvent être des vecteurs. On note O le vecteur nul. A tout point M de $\mathbb{R}^d$, on associe le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ alors $M + \overrightarrow{u}$ dénote le point $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$, donc : $M + \overrightarrow{u} = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$. Si Δ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^d$ et A un point alors $A + \Delta$ dénote la droite passant par A de direction Δ. Ainsi

$$(D) = A + \Delta = \{M \in \mathbb{R}^d / \overrightarrow{AM} \in \Delta\}$$

. De même si Π est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $A \in \mathbb{R}^3$ alors $A + \Pi$ dénote le plan passant par A et dirigé par Π, donc :

$$(P) = A + \Pi = \{M \in \mathbb{R}^d / \overrightarrow{AM} \in \Pi\}$$

$\mathbb{R}^d$ est muni de son produit scalaire usuel. Si M et N sont deux points de $\mathbb{R}^d$ alors MN désigne la distance de M à N , donc $MN = \|\overrightarrow{MN}\|$.

2 Application affine

Definition 1 *On appelle application affine de $\mathbb{R}^d$ toute application f de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$ tel qu'il existe une application linéaire $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$ tel que :*

$$\forall (M, N, M', N') \in (\mathbb{R}^d)^4 \quad \begin{cases} M' = f(M) \\ N' = f(N) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \widetilde{f}(\overrightarrow{MN})$$

Ainsi si A est un point quelconque de $\mathbb{R}^d$ alors :

$$\forall M \in \mathbb{R}^d \quad f(M) = f(A) + \widetilde{f}(\overrightarrow{AM})$$

Proposition 1 *Si f est une application affine alors l'application $\widetilde{f}$ de la définition est unique*

En effet si g et h sont deux applications linéaires vérifiant les conditions de la définition soit u un vecteur de $\mathbb{R}^d$ et A et B deux points tel que $\overrightarrow{AB} = u$ d'images respectives A' et B' par f. Alors :

$$\overrightarrow{A'B'} = g(\overrightarrow{AB}) = h(\overrightarrow{AB})$$

par suite $g(u) = h(u)$ et alors $g = h$

Definition 2 *L'application linéaire $\widetilde{f}$ est appelée l'application linéaire associée à l'application affine f*

Exemple 1 *Si $f = t_{\overrightarrow{u}}$ est la translation de vecteur d u alors f est une application affine dont l'application linéaire associée est $\widetilde{f} = Id_{\mathbb{R}^d}$*

En effet si M et N sont deux points de $\mathbb{R}^d$ d'images respectives M' et N' alors on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$ en particulier , on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ donc $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}(\overrightarrow{MN})$.

Exemple 2 *Une homothétie de centre A et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une application affine dont l'application linéaire associée est l'homothétie vectorielle de rapport k.*

Exemple 3 *Toute application linéaire de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^d$ est une application affine dont l'application linéaire associée est elle même.*

Definition 3 *On appelle point fixe d'une isométrie affine tout point A de $\mathbb{R}^d$ tel que $f(A) = A$*

Si A est un point fixe de f alors , pour tout $M \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$f(M) = A + \widetilde{f}(\overrightarrow{AM})$$

Théorème 1 *Soit f une application affine ayant au moins un point fixe A . Alors l'ensemble des points fixes de f est : $A + E_1$ où $E_1 = \ker(\widetilde{f} - Id_{\mathbb{R}^d})$*

En effet si M est un point fixe de f alors $f(M) = M$ et comme $f(A) = A$ on a $\widetilde{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{AM} \in E_1$ d'où $M \in A + E_1$. Réciproquement si $M \in A + E_1$ alors $\widetilde{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$ donc $f(M) = A + \widetilde{f}(\overrightarrow{AM}) = A + \overrightarrow{AM} = M$

3 Isometries affines

Définitions

Definition 4 *On appelle isométrie affine de $\mathbb{R}^d$, toute application affine de $\mathbb{R}^d$ qui conserve la distance.*

Théorème 2 *Soit f une application affine de $\mathbb{R}^d$. Alors f est une isométrie affine si et seulement si son application linéaire associée $\widetilde{f}$ est un automorphisme orthogonal.*

Si $\widetilde{f}$ est direct (resp. indirect) on dit que f est une isométrie affine directe ou déplacement et si $\widetilde{f}$ (resp. indirecte ou antidéplacement).
Si on note $GA(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des isometries affines de $\mathbb{R}^d$ alors $(GA(\mathbb{R}^d), \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe orthogonal $(O(\mathbb{R}^d), \circ)$ appelé groupe affine orthogonal de $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs l'ensemble $GA^+(\mathbb{R}^d)$ des déplacements est un sous-groupe du groupe affine, appelé le groupe affine orthogonal spécial de $\mathbb{R}^d$.

3.1 Classification des isometries planes

Théorème 3 *Toute isométrie plane et :*

(i) soit le composé d'une rotation et une translation

(ii) soit la composée d'une symétrie axiale et une translation de vecteur parallèle à l'axe de cette symétrie

3.2 Classification des isométrie dans l'espace

Théorème 4 *Toute isométrie affine de $\mathbb{R}^3$ est de l'un des types suivants :*
(i) Un translation
(ii) Un vissage(composé d'une rotation et une translation de vecteur parallèle à l'axe de cette rotations (ce composé est commutatif)
(iii) La composée d'une réflexion orthogonale et une translation dont le vecteur est parallèle au plan de la réflexion (composé est commutatif)
(iv) La composée d'une rotation d'axe (Δ) et une réflexion orthogonale de plan orthogonal à (Δ) (ce composé est commutatif)

3.3 Quelques exemples

3.3.1 Exemple 01

Soit f l'application qui associe à tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z - 1 \\ y' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}z \\ z' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$
2. Classifier f et determiner ses éléments caractéristiques

3.3.2 Exemple 02

Soit f l'application qui associe à tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}z + 1 \\ y' = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z + 1 \\ z' = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + 3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$
2. Classifier f et determiner ses éléments caractéristiques

3.3.3 Exemple 03

Soit f l'application qui associe à tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ le point $M'(x', y', z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}z + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{3}{2} \\ z' = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie affine de $\mathbb{R}^3$
2. Classifier f et determiner ses éléments caractéristiques