INTEGRALES DOUBLES ET TRIPLES

26 avril 2011

1 INTÉGRALES DOUBLES

1.1 Résumé de cours

1.1.1 Définition de l'intégrale double sur des parties particulières de $\mathbb{R}^2$

1) Soit Δ une partie de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ suivante :
<< il existe deux applications ϕ et ψ continues sur un segment $[a,b]$ tel que $\phi \leq \psi$ et :

$$\Delta == \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{array} \right. \right\} >>$$

On définit l'intégrale de f sur Δ comme suit :

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx \right)$$

2) Théorème (Fubini) : Soit Δ une partie de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ ci-dessus et la propriété $\mathscr{Q}$ suivante :
<< il existe deux applications u et v continues sur un segment $[c,d]$ tel que $u \leq v$ et :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ u(y) \leq x \leq v(y) \end{array} \right. \right\}$$

alors :

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx \right) = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx)dy \right)$$

4) **Cas particulier :** si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ est une application continue alors , si on note :

$$\int_c^d f(x,y)dy = F(x)$$

pour tout $x \in [a,b]$ et

$$\int_a^b f(x,y)dx = G(y)$$

pour tout $y \in [c,d]$ alors on a :

$$\int_a^b F(x)dx = \int_c^d G(y)dy$$

Cette intégrale est notée :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

elle vaut

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx$$

avec $\Delta = [a,b] \times [c,d]$

1.1.2 Propriétés

Toutes les parties Δ de $\mathbb{R}^2$ considérées ici sont celles ayant l'une des propriétés décrites ci-dessus (l'existence des fonctions π et ψ ou u et v tel que ....)
1) Linéarité : Si f et g sont continues sur Δ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :

$$\iint_{\Delta} (f + \alpha g)dydx = \iint_{\Delta} f(x,y)dydx + \alpha \iint_{\Delta} g(x,y)dydx$$

2) Si $\Delta \subset \Delta'$ alors si f est continue positive sur Δ' on a :

$$\iint_{\Delta} f(x,y)dydx \leq \iint_{\Delta'} f(x,y)dydx$$

3) Si $\Delta \cap \Delta'$ est réduit à une courbe ou un ensemble fini alors :

$$\iint_{\Delta \cup \Delta'} f(x,y)dydx = \iint_{\Delta} f(x,y)dydx + \iint_{\Delta'} f(x,y)dydx$$

pour toute application f continue sur Δ et Δ' à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.1.3 Changement de variables

On considère deux ouverts $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit φ une application bijective de $\mathscr{U}$ vers $\mathscr{V}$ de classe C^1 sur $\mathscr{U}$. Soient $D \subset \mathscr{U}$ et $\Delta \subset \mathscr{V}$ deux parties fermés bornées tel que $\varphi(D) = \Delta$.On note $(x,y) = \varphi(u,v)$ et $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ la valeur absolue du jacobien de φ au point (u,v).On pose $g = f \circ \varphi$. Alors on a :

$$\iint_{D} f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} g(u,v) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv$$

1.2 Fiche de révisions

1.3 Exercices

Exercice 1:
On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx$ et $J = \displaystyle\iint_{\Delta} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$ avec $\Delta = [0,1]^2$.
En calculant de deux manières différentes J, évaluer I

Exercice 2:
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 < a < b$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0,\pi] \quad \text{et} \quad y \in [a,b]\}$
Calculer : $\displaystyle\iint_{\Delta} \frac{1}{y - \cos x} dxdy$

Réponse

Par le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{u-\cos x}dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{u(1+t^2)+t^2-1} \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(u+1)t^2+u-1} \\
&= \frac{2}{u-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{u+1}{u-1}t^2}dt \\
&= \frac{2}{u-1}\sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{u+1}{u-1}}t\right)\right]_0^{+\infty} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{u^2-1}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}
\end{aligned}$$

$\int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{u^2-1}}du$ peut se calculer en posant $v = \cosh u$ dès lors $dv = \sinh u du$ et $\sqrt{u^2-1} = \sinh u$ et les bornes nouvelles seront $a' = \arg\cosh a$ et $b' = \arg\cosh b$
le résultat définitif est :

$$I = \iint_{(\Delta)} \frac{1}{u-\cos x}dxdu = \pi(\arg\cosh b - \arg\cosh a)$$

On rappelle que :

$$\arg\cosh x = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$$

pour tout réel x tel que $x \geq 1$. Alors :

$$I = \ln\frac{1+\sqrt{b^2-1}}{1+\sqrt{a^2-1}}$$

Exercice 3:
a et b sont deux nombres réels tel que $0 < a < b$. On définit la fonction f par $f(x,y) = x^y$. En intégrant f sur un domaine convenable determiner l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$

Réponse

On pose $\Delta = [0,1]\times[a,b]$ et on considère la restriction de f à Δ. On a alors :

$$\int\int_{\Delta} x^y dxdy = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$$

Par le théorème de Fubini on a :

$$\int\int_{\Delta} x^y dxdy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}dy = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

Il en résulte que :

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

2 INTEGRALES TRIPLES

à venir