COURBES PARAMETREES : RAPPELS ET COMPLEMENTS

26 avril 2011

1 Généralités

Dans tout ce qui suit $n \in \{2, 3\}$. On appelle arc paramètré de classe $\mathcal{C}^k$ un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I vers $\mathbb{R}^n$. On appelle support de l'arc la partie $f(I)$ de $\mathbb{R}^n$. Un point multiple du support est un point M ayant plus qu'un antécédent par f. Dans la pratique f est donnée par ses coordonnées.

2 Courbes planes

2.1 Local

Soit $t_0 \in I$ On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tel que la famille $f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est libre. On choisit alors les plus petits entiers non nuls possibles vérifiant cette propriété. On a alors $1 \leq p < q$ et un développement limité de f au voisinage de t_0 est :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o((t-t_0)^q)$$

Si $q > p+1$ alors les vecteurs $f^{(k)}(t_0)$ pour tout k tel que $p < k < q$ sont colinéaires avec $f^{(p)}(t_0)$ de sorte qu'au voisinage de t_0,

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0)^p \left(\frac{1}{p!} + ... + \frac{(t-t_0)^{q-1-p}}{(q-1)!} \right) f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o((t-t_0)^q)$$

donc , au voisinage de t_0, les coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$ de $f(t)$ dans le repère $(f(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ vérifient :

$$X(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad Y(t) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

et ceci et valable même si $q = p+1$ car dans ce cas on a :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^{(q)}(t_0) + o((t-t_0)^q)$$

Résumé : Au voisinage de t_0, $X(t)$ a le même signe que $(t-t_0)^p$ et $Y(t)$ a le même signe que $(t-t_0)^q$, ce qui fourni les quatres cas vus en classe, suivant la parité de p et q :

- si p est pair : point de rebroussement de 1ere espèce si q est impaire et de 2eme espèce si q est pair
- si p est impair : point d'inflexion si q est impair ou point ordinaire si q est pair.

2.2 Branches infinies

Lorsque $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\pm\infty$, on a une branche infinie 'à l'instant t_0 '. Pour connaître la nature de cette branche il faut examiner les cas suivants :
• si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\ell\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\pm\infty$ alors la droite q'équation $y=\ell$ est une asymptote à la courbe .
• si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\ell\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\pm\infty$ alors la droite q'équation $x=\ell$ est une asymptote à la courbe .
• si $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=\pm\infty$ on étudie $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ et on trouve une limite finie a on cherche $\lim\limits_{t\to t_0}(y(t)-ax(t))$, si on trouve une limite finie b alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe. Si on trouve $b=\pm\infty$ alors la courbe admet une branche parabolique dirigé par la droite d'équation $y=ax$. Si $a=\pm\infty$ la courbe admet une branche parabolique dirigée par l'axe des coordonnées.

2.3 Courbes planes en polaires

La fonction vectorielle u définie par $u(\theta)=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.Etant donné un arc dont le point courant $M(\theta)$ a pour coordonnées polaires $(r(\theta),\theta)$, On appelle repère mobile le repère $(f(\theta),u(\theta),u'(\theta)$ où $f(\theta)=M(\theta)$. On souligne l'importance de ce repère dans l'étude des arcs paramètrés en polaires et on remarque que c'est un repère direct et que les dérivées successives de $u(\theta)$ sont unitaires colinéaires à $u(\theta)$ ou à $u'(\theta)$.
• **Tangente :** En un point de paramètre θ_0 le coefficient directeur dans le repère mobile de la tangente est $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}\dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}$ si cette limite existe.
Notons que si $r(\theta_0)=0$ et s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $r^{(k)}(\theta_0)\neq 0$ alors la tangente est dirigée par $u(\theta_0)$.
• **Branches infinies :** Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0}|r(\theta)|=+\infty$ alors :
Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)=\ell\in\mathbb{R}$ alors la droite d'équation $Y=\ell$ dans le repère $(O,u(\theta),u'(\theta))$ est une asymptote à la courbe quand θ est voisin de θ_0
Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)=\pm\infty$ alors quand θ est voisin de θ_0, la courbe admet une branche parabolique de direction (OX) axe des des abscisses du repère $(O,u(\theta),u'(\theta))$
• **Cercle asymptote :** Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta)=R\in\mathbb{R}^*$ alors le cercle de centre O et de rayon $|R|$ est un cercle asymptote à la courbe. L'étude du signe de $r(\theta)-R)$ informe de la position relative de la courbe et du cercle.
• **Point asymptote (pôle) :** Si $\lim\limits_{\theta\to\theta_0} r(\theta)=0$ alors l'origine est un point asymptote à la courbe.
• **Branche infinie en spirale :** Si $\lim\limits_{\theta\to\pm\infty}|r(\theta)|=+\infty$ alors la courbe admet une branche infinie en spirale.

3 Courbes dans l'espace

3.1 Tangente

Si $\Gamma=(I,f)$ est un arc paramètré de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ alors si $t_0\in I$ et $f'(t_0)\neq 0$ alors le vecteur $f'(t_0)$ est un vecteur tangent à Γ au point $f(t_0)$. La droite passant par $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$ est la tangente à Γ au point $f(t_0)$.

3.2 Courbe tracée sur une surface

une courbe paramètrée

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \\ z = w(t) \end{cases} \qquad t \in I$$

est dite tracée sur la surface

$$(S) : g(x, y, z) = 0 \quad (x, y, z) \in U$$

où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$ si :

$$\forall t \in I (u(t), v(t), w(t)) \in U \quad \text{et} \qquad f(u(t), v(t), w(t)) = 0$$

Supposons que f est de classe C^1 sur U et u, v, w de classe C^1 sur I . Alors par composition on a :

$$\forall t \in I u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t), w(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t), w(t)) + w'(t) \frac{\partial f}{\partial z}(u(t), v(t), w(t)) = 0$$

C'est-à-dire :

$$\langle \vec{\mathbf{grad}} f(g(t)), g'(t) \rangle = 0$$

où $g(t) = (u(t), v(t), w(t))$
Ceci se traduit par le fait que si g(t) est un point régulier de (S) et de Γ alors la tangente à la courbe Γ au point $g(t)$ est orthogonale à la normale au point $g(t)$ à la surface (S)

3.3 Courbe intersection de deux surface

On considère deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) qui se coupent suivant une courbe paramétréée (I, h). Soit M un point de (I, h) régulier pour les deux nappes et tel que les plans tangents en M respectivement aux deux nappes sont distincts. Alors la tangente à cette courbe en M est l'intersection de ces plans.