Programme de la classe de première année TSI

I - Introduction à l'analyse

Objectifs

Il s'agit essentiellement, en partant du programme des classes terminales Sciences Techniques et en s'appuyant sur les connaissances préalables des étudiants, de donner les bases mathématiques utiles aux autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles). Les questions abordées seront considérées comme définitivement acquises et il n'y aura pas lieu de reprendre ensuite leur étude dans le cours de mathématiques.

Le programme se limite strictement aux notions de la théorie des ensembles figurant ci-dessous ; celles-ci doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent en aucun cas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée.

Les propriétés des fonctions polynomiales et rationnelles et des fonctions exp *(réelle),* ln, cos, sin *sont rappelées sans démonstration.*

Les propriétés élémentaires liées à la dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle sont supposées connues. Les dérivées des fonctions circulaires réciproques seront déterminées en admettant le théorème sur la dérivabilité d'une fonction réciproque.

En ce qui concerne les équations différentielles, il convient ici de rappeler la notion de primitive et d'admettre le théorème fondamental la reliant à la notion d'intégrale. Toute théorie de l'intégration est exclue à ce stade.

Il importe de relier l'étude des équations différentielles du premier ordre et des équations linéaires du second ordre à coefficients constants à l'enseignement des autres disciplines (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée (échelon unité, créneau, exponentielle réelle ou circulaire) et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. Dans le cadre de tels problèmes, on peut être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux) mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étaudiants.

Contenu

1. Vocabulaire de la théorie des ensembles

- Ensemble, élément d'un ensemble, relation d'appartenance ; partie d'un ensemble, relation d'inclusion ; réunion, intersection, différence, complémentaire.
- Application, fonction ; produit (cartésien), graphe d'une application ; image, antécédent d'un élément ; image directe, réciproque d'une partie ; restriction, prolongement, application induite.
- Injection ; surjection ; bijection, application réciproque.

2. Principe de récurrence

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Principe de récurrence.
- Raisonnements par récurrence.

3. Fonctions usuelles

- Fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
- Exponentielle réelle, logarithme néperien ; fonction $x \mapsto a^x$, logarithmes de base a ($a > 0$) ; fonctions puissances $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{R}$).
- Fonctions trigonométriques circulaires, fonctions arctan, arcsin, arccos.
- Fonctions trigonométriques hyperboliques, fonctions arctanh, arcsinh, arccosh.
- Fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$; exponentielle complexe.

4. Équations différentielles linéaires

- Caractérisation de la fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) par l'équation différentielle $y' = \alpha y$ et la condtion initiale $y(0) = 1$.

– Équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre $y' + a(t)y = b(t)$, où a, b, c sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. Équation sans second membre associée. Méthode de variation de la constante. Problème de Cauchy . Expression des solutions sous forme intégrale.
– Équations linéaires du second ordre à coefficients constants $ay'' + by' + cy = f(t)$, où a, b, c sont des nombres complexes, $a \neq 0$, et f une somme de fonctions de type $t \mapsto e^{\alpha t} P(t)$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Équation sans second membre associée, équation caractéristique. Problème de Cauchy. Plan vectoriel des solutions de l'équation sans second menbre associée.

5. Développements limités

– Formule de Taylor-Young. Développements limités usuels.
– Exemples de calculs de développements limités.

6. Courbes paramétrées planes

– Courbe paramétrée (ou chemin) de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^2$.
– Point régulier, tangente.
– Étude locale : branches infinies.
– Propriétés métriques : longueur, abscisse curviligne.
– Étude des courbes paramétrées en coordonnées polaires.
– Interprétations cinématiques : mouvement d'un point mobile, trajectoire, vitesse et accélération.

Commentaires

- Vocabulaire relatif aux ensembles et aux applications : Il s'agit essentiellement de familiariser les étudiants à la terminologie de base.

- Fonctions usuelles :
On rappellera brièvement les notions de dérivabilité, de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$), dérivation de la fonction réciproque.

On suppose connues les propriétés usuelles des fonctions puissances, de l'exponentielle (réelle) et du logarithme népérien. Les étudiants doivent être capables de visualiser de façon immédiate les graphes de ces fonctions et se familiariser avec leurs propriétés (formules d'addition et leurs conséquences, formules de dérivation, relations de comparaison, etc.). Les étudiants doivent savoir dériver une fonction de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$.

- Équations différentielles linéaires :
Il convient ici de rappeler la notion de primitive et d'admettre le théorème fondamental reliant à la notion d'intégrale. Toute théorie générale de l'intégration est exclue à ce stade.

Étudier l'équation fonctionnelle $f(t + u) = f(t)\, f(u)$ où f est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Équations différentielles linéaires scalaires de premier ordre : structure de l'ensemble des solutions ; la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ; principe de superposition lorsque $b = b_1 + b_2$.

Conséquence de la linéarité de l'équation différentielle linéaire scalaire de second ordre : structure de l'ensemble des solutions ; la solution générale de l'équation avec second membre est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation sans second membre ; principe de superposition lorsque $f = f_1 + f_2$.

- Développements limités (commentaire) :
On explique les méthodes usuelles d'obtention d'un développement limité au moyen d'exemples explicites.
Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée.
Il n'est pas souhaitable d'introduire les notations de Landau à ce stade. La formule de Taylor-Young est, à ce stade, admise.

- Courbes paramétrées planes :
On adopte ici le point de vue suivant : une fonction vectorielle f tend vers un vecteur l si les fonctions coordonnées de f tendent vers les coordonnées de l.

En ce qui concerne l'étude métrique et l'étude en coordonnées polaires, le plan $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire et de l'orientation canonique.

On traitera, uniquement, sur des exemples les points non biréguliers (inflexions, rebroussements).

II - Géométrie

Objectifs

Il s'agit essentiellement, en partant du programme des classes terminales Sciences Techniques et en s'appuyant sur les connaissances préalables des étudiants, de donner les bases mathématiques utiles aux autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles). Les questions abordées seront considérés comme définitivement acquises et il n'y aura pas lieu de reprendre ensuite leur étude dans le cours de mathématiques.

L'objectif est
- *de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de terminale.*
- *d'exploiter, par identification de $\mathbb{C}$ au plan euclidien $\mathbb{R}^2$, les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs complexes pour l'étude cinématique et géométrique des courbes planes.*

Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : calcul vectoriel, barycentre, alignement, orthogonalité, distance, mesure d'angle.

Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques, à la trigonométrie et à la géométrie.

A l'issue de la terminale, les étudiants connaissent le « plan géométrique » euclidien et l'« espace géométrique » euclidien (de dimension 3) en tant qu'ensembles de points. Ils connaissent en particulier la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que les propriétés opératoires usuelles des vecteurs. Il convient de faire constater que l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace) est muni d'une structure de plan vectoriel (resp. d'espace vectoriel de dimension 3) en l'identifiant à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$ (resp. à $\mathbb{R}^3$) par la donnée d'un base orthonormale. Toute théorie générale des espaces vectoriels est exclue à ce stade.

Dans le plan et l'espace, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles.

La donnée d'un repère orthonormal permet d'identifier le plan (resp. l'espace) à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

Contenu

1. Nombres complexes

- Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire, conjugué d'un nombre complexe.
  Affixe d'un point, d'un vecteur dans un repère orthonormal ; image d'un nombre complexe.
  Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire ; interprétation en termes de distances.
- Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.
  Définition du groupe $\mathbb{U}$. Définition de $e^{i\theta}$, relation d'Euler.
  Propriété de l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Formule de Moivre. Linérisation et factorisation d'expressions trigonométriques.
  Arguments d'un nombre complexe. Écriture d'un nombre complexe $z \neq 0$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme trigonométrique).
  Racine n-ième de l'unité. Résolution de l'équation $x^n = a$.
- Équation algébrique du second degré.
  Résolution des équations du second degré à coefficients complexes ; discriminant.
- Exponentielle complexe.
  Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $e^z = e^{\mathcal{Re}\, z} e^{i\, \mathcal{Im}\, z}$. Propriétés.
- Nombres complexes et géométrie plane.
  Interprétation des transformations : $z \mapsto az$, $z \mapsto az + b$, $z \mapsto z^{-1}$, $z \mapsto \overline{z}$.
  Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{z-a}{z-b}$.

2. Géométrie euclidienne en dimension deux

- Modes de repérage dans le plan.
  Repère cartésien du plan, coordonnées cartésiennes.
  Repère orthonormal direct, changement de repère.
  Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormal.
  Repère polaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ, par : $\overrightarrow{u}(\theta) = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2$ et $\overrightarrow{v}(\theta) = -(\sin\theta)e_1 + (\cos\theta)e_2$, où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- Produit scalaire.
  Produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ rapportés à une base orthonormale : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.
  Bilinéarité, symétrie du produit scalaire. Norme d'un vecteur.
  Si u et v sont non nuls, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; sinon, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

– Définition d'une isométrie du plan, d'un déplacement ; exemples : translation, rotation, réflexion. Image par une isométrie des figures et des configurations usuelles.
Expression analytique de l'image d'un vecteur par une rotation d'angle θ.
– Déterminant.
Déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ rapportés à une base orthonormale directe : $\mathrm{Det}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx'$.
Bilinéarité, antisymétrique.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, $\mathrm{Det}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; sinon, $\mathrm{Det}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.
– Dérivation de $f \cdot g$, $\|f\|$, $\mathrm{Det}\,(f, g)$ lorsque f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
– Droites.
Caractérisation la colinéarité de deux vecteurs, de l'alignement de trois points au moyen d'un déterminant.
Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM}$ et de $M \mapsto \mathrm{Det}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$.
Paramétrage et équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, par un point et un vecteur normal. Équation polaire d'une droite.
Intersection de deux droites.
Distance à une droite, équation normale d'une droite.
– Cercles.
Équation cartésienne d'un cercle. Équation polaire d'un cercle passant par l'origine du repère. Intersection d'un cercle et d'une droite.
– Similitudes directes du plan. Définition d'une similitude (transformation affine multipliant les distances dans un rapport donné) ; rapport de similitude. Définition d'une similitude directe. Homothéties de rapport non nul, translations, rotations. Composée de deux similitudes.
Écriture complexe d'une similitude directe. Centre et mesure de l'angle d'une similitude directe distincte d'une translation.

3. Coniques dans le plan

– Ligne de niveau de MF/MH, excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole.
– Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.
– Caractérisation bifocale.
– Détermination, en coordonnés cartésiennes, des tangentes à une conique.
– Equations polaires.
– Image d'un cercle par une affinité orthogonale.

4. Géométrie euclidienne en dimension trois

– Mode de repérage dans l'espace.
Coordonnées cartésiennes, cylindriques, sphériques.
– Produit scalaire.
Définition du produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ (donnés par leurs coordonées dans un repère orthonormal) : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.
Bilinéarité, symétrie du produit scalaire. Norme d'un vecteur.
– Produit vectoriel.
Définition du produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ (donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormale) : $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{e_1} + (zx' - xz')\overrightarrow{e_2} + (xy' - yx')\overrightarrow{e_3}$.
Bilinéarité, antisymétrie.
Condition de colnéarité de deux vecteurs.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est le vecteur de norme $\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ directement orthogonal à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; sinon, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ est le vecteur nul.
– Isométries de l'espace, déplacements ; exemples : translation, réflexions, rotations.
– Déterminant ou produit mixte.
Définition du produit mixte (ou déterminant) de trois vecteurs (donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormale) : $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$.
Trilinéarité, antisymétrie. Expression dans un repère orthonormale direct. Condition pour que trois vecteurs soient coplanaires.
– Droites et plans.
Paramétrage d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, deux points distincts, deux plans sécants.
Équation d'un plan défini par un point et deux vecteurs indépendants, un point et un vecteur normal, trois points non alignés. Équation normale d'un plan ; distance à un plan.
Intersection de droites et de plans.
Distance d'un point à une droite.
Distance de deux droites ; perpendiculaire commune.

– Sphère.
  Équation cartésienne d'une sphère dans un repère orthonormal.
  Intersection d'une sphère et d'une droite, d'une sphère et d'un plan.

Commentaires

- Nombres complexes :
Il ne s'agit pas de donner la définition générale de groupe ou de corps.
La notation du corps $\mathbb{C}$ n'est pas exigible des étudiants.
Notations : $Re(z)$, $Im(z)$, $\overline{z}$.
Interprétation géométrique de $|z|$, de $|z-a|$; de disque ouvert (fermé) de centre a.

Par définition : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
Les étudiants doivent connaître les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $tan(a+b)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $tan(2x)$. Ils doivent savoir exprimer $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$, $tan(\theta)$ et $e^{i\theta}$ à l'aide de $tan(\frac{\theta}{2})$ et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1.

Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, allignement, orthogonalité.

- Géométrie euclidienne en dimension deux :
Dans le plan les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthnormal, angles.
La donnée d'un repère orthnormal identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$.
Les formules de changement de repère sont à connaître, uniquement dans le cas où les deux repères sont orthonormaux directes.
Identification $\overrightarrow{u} = e^{i\theta}$, $\overrightarrow{v} = ie^{i\theta}$.

Produit scalaire : Interprétation en terme de projection pour le produit scalaire.
Dans $\mathbb{C}$, interprétation géométrique de $Re(\overline{a}b)$.
La classification générale des isométries du plan est hors programme.
Au moment de l'étude des matrices on donnera la matrice d'une rotation vectorielle.
La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe.

Déterminant : Dans $\mathbb{C}$, interprétation de $Im(\overline{a}b)$ comme déterminant des vecteurs associés à a et b. Interprétation géométrique de $|Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$ comme aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Caractérisation d'un cercle de diamètre $[AB]$ par l'équation $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

L'étude générale des similitudes du plan est hors programme.
Les étudiants doivent connaître l'effet d'une similitude directe sur les angles orientés et les aires.

- Coniques dans le plan :
Enoncé, sans démonstration, de la caractérisation des éllipses et des hyperboles à l'aide des lignes de niveau de $MF+MF'$ et de $|MF-MF'|$.

Projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.

- Géométrie euclidienne en dimension trois :
Dans l'espace les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthnormal, angles.
La donnée d'un repère orthnormal identifie l'espace à $\mathbb{R}^3$.
Pour les coordonnées sphériques, on convient de noter θ la colatitude, mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle entre Oz et OM.
Expression de la distance de deux points dans un repère orthonormal.
La notion d'orientation de l'espace est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Il convient de donner les conventions physiques usuelles.

Interprétation de $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||$ comme aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
L'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est linéaire comme composée de trois applications (projection, rotation d'angle droit, homothétie).

La classification des isométries, ainsi que celle des déplacements de l'espace sont hors programme.

Interprétation de $|Det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ comme volume du parallélipipéde construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

En dimensions 2 et 3, exemples de recherche de lignes de niveau, définies notamment par des conditions portant sur des distances et des mesures d'angles.

III - Suites - Fonctions d'une variable réelle

Objectifs

Le programme d'analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de suites et de fonctions. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (approximations de solutions d'équations numériques, approximation d'une intégrale ...) et d'algorithme de calcul formel (dérivation, primitivation ...) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé de courbes.

Le cadre d'étude est bien délimité : suites de nombres réels ou complexes, fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles ou complexes, courbes planes.*

Le programme constitue l'étude globale des suites et des fonctions (opérations, majorations, monotonie, existence d'extremums ...) et l'étude du comportement local ou asymptotique. En particulier, il convient de mettre en valeur le caractére local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de tangente.
Il combine aussi l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie d'une suite ou d'une fonction, existence de limites, continuité, existence de zéros et d'extremums de fonctions, existence de tangentes ...) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, évaluations asymptotiques de suites et de fonctions, approximations de zéros et d'extremums de fonctions, propriétés métriques des courbes planes ...).
En analyse, les majorations est les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtentions de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue ou de module, emploi du calcul différentiel et intégral (recherche d'extremums, inégalités des accroissements finis et de la moyenne, majorations tayloriennes ...). Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités stricts aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations (caractère borné, caractère croissant, existence d'une limite, continuité en un point, continuité sur un intervalle, dérivabilité en un point ...). En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations) est exclu.

En ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité ...) avec celle de problèmes qualitatifs (majorations, encadrements, caractère lipschitzien, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point ...).

Le chapitre de dérivation et intégration est organisé autour de trois axes :
- Dérivation en un point et sur un intervalle ;
- Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux, à partir de l'intégration des fonctions en escalier ;
- Téorème fondamental reliant l'intégration et la dérivation ; exploitation de ce théorème pour le calcul différentiel et intégral, et notamment pour les formules de Taylor.

L'étude générale de la dérivation et de l'intégration doit être illustrée par de nombreuses exemples portant sur les fonctions usuelles (vues en début d'année) et celles qui s'en déduisent.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Les notions de fonction réglée et de fonction intégrable au sens de Riemann sont hors programme.

Dans la partie d'approximation sont regroupées un certains nombres de méthodes débouchant sur des calculs approchés par la mise en place d'algorithmes. Aucune connaissance n'est exigible concernants les erreurs ; seul leurs ordres de grandeur doivent être connus des étudiants. A cette occasion, on pourra introduire la notion de rapidité de convergence d'une suite mais aucune connaissance n'est exigible sur ce point.

1. Nombres réels, suites et fonctions d'une variable réelle

A - Nombres réels

– Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, compatible avec l'addition et la multiplication, valeur absolue d'un réel, inégalité triangulaire :
  $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.
  Défintion d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.
  Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure (admise).
  Définition de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.
  Définition des intervalles de $\mathbb{R}$. Tout intervalle $]a, b[$ non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et son complémentaire.

- Partie entière, valeurs décimales approchées à 10^{-n} près, approximation par défaut par excès.

B - Suites de nombres réels

- Définition d'une suites de nombres réels, opérations, suites majorées, minorées, bornées, notation $sup(u_n)$ et $inf(u_n)$.
  Suites monotones, strictement monotones.
  limites d'une suite, suite convergente, divergente.
  Lorsque $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$.
  Toute suite convergente est bornée.
  Produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0.
- Comparaison des suites de référence : $n \mapsto a^n$, $n \mapsto n^\alpha$, $n \mapsto (\ln(n))^\beta$, $n \mapsto n!$, où $a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$.
- Théorèmes d'existence de limite.
  Théorème de limite monotone : toute suite croissante majorée $(u_n)_n$ converge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$. Extension au cas d'une suite croissante non majorée.
  Théorèmes d'encadrement (Gendarme).
- Suite adjacentes.
- Suites extraites d'une suite. Toute suite extraite d'une suite convergeant vers ℓ converge vers ℓ.
- Brève extension aux suites complexes.
  Suites à valeurs complexes ; parties réelle et partie imaginaire d'une suite ; conjugaison.
  Suites bornées.
  Limite d'une suite à valeurs complexes ; caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire.
  Opérations algèbriques sur les limites.

C - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

- Fonctions majorées, minorées, bornées, extremum, extremum local. Borne supérieure (resp. inférieure) d'une fonction.
  Fonctions monotones, strictement monotones.
  Fonctions paires, impaires, T-périodiques, opérations.
- Etude locale d'une fonction.
  Limite d'une fonction en un point, continuité en un point.
  Lorsque $b \in \mathbb{R}$, la relation $f(x) \to b$ équivaut à la relation $f(x) - b \to 0$.
  Lorsque $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ équivaut $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = b$.
  limite à droite, limite à gauche, continuité à droite, à gauche.
  Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.
- Opérations algébriques sur les limites, compatibilité de la notion de limite avec la relation d'ordre.
  limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente.
  Théorème de limite monotone d'une fonction.
- Comparaison des fonctions usuelles : $x \mapsto a^x$, $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto (\ln(x))^\beta$, où $a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$.
- Fonction continue sur un intervalle : Ensemble $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I et à valeurs réelles, opérations, composée de deux fonctions continues.
  Prolongement par continuité en une extrémité de I.
  Image d'un intervalle pour une fonction continue, théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une fonction continue (La démonstration de chacune de ces trois résultats est admise).
  Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment : Définition, opérations et propriétés.
- Brève extension aux fonctions complexes.
  Fonctions à valeurs complexes ; parties réelle et partie imaginaire d'une fonction ; conjugaison.
  Fonctions bornées.
  Limite d'une fonction à valeurs complexes en un point ; continuité en un point ; caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire.
  Opérations algébriques sur les limites.
  L'ensemble $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I à valeurs complexes.

2. Dérivation des fonctions à valeurs réelles

- Dérivabilité en un point, dérivabilité à gauche, à droite.
  Fonctions dérivables sur un intervalle, fonction dériv'ee. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.
  Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle, fonctions n fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Opérations. Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz).

Extremums locaux des fonctions dérivables.
- Théorème de Rolle, formules des accroissements finis, inégalité des accroissements finis :
  Si $m \leq f' \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
  Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables.
  Application de l'inégalité des accroissements finis à l'étude des suites définies par une relation de récurrence :
  $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Si f est continue sur $[a, b]$, de classe sur $]a, b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.
  Dérivabilité en un point, caractérisation à l'aide des parties réelle et immaginaire ; opérations sur les fonctions dérivables.
  Ensembles $\mathcal{C}^n(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$ à valeurs complexes, où $0 \leq n \leq +\infty$, opérations ; dérivée n-ième d'un produit.

3. Intégration et dérivation

A - Intégration sur un segment des fonctions réelles
- Définition d'un fonction en escalier sur un segment $[a, b]$, d'une subdivision sur $[a, b]$ subordonné. Ensembles des fonctions en escalier sur un segment.
  Approximation des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe des fonctions ϕ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que : $\phi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \phi \leq \epsilon$. (la démonstration de ce résultat est hors programme).
  Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Linéarité. Croissance.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
  Notations : $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
  Définition de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$, où a et b appartiennent à I.
  Linéarité. Croissance ; inégalité $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.
  Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, relation de Chasles.
  Invariance de l'intégrale par translation.
  Valeur moyenne d'une fonction.
  Inégalité de la moyenne : $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.
  Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment est nulle si, et seulement si, son intégrale est nulle.
  Approximation d'une intégrale par la méthode des réctangles, par la méthode des trapèzes.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.
  Par définition, $\displaystyle\int_I f = \int_I Re(f) + i \int_I Im(f)$.
  Linéarité, relation de Chales et inégalité de la moyenne.

B - Intégration et dérivation
Dans cette partie, les fonctions considérées sont à valeurs réeles ou complexes.
- Primitive et intégrale d'une fonction continue.
  Définition d'une primitive d'une fonction continue.
  Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
  Théorème fondamental : étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I et un point $a \in I$,
  $*$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;
  $*$ pour toute primitive h de f sur I, $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = h(x) - h(a)$.
- Formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
  Formule de changement de variable : étant données une fonction f continue sur I et une fonction ϕ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, $\displaystyle\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)\, du$.
- Calcul des primitives.
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

4. Calculs asymptotiques
- Relations de comparaison des suites : suites dominée (resp. négligeable) par une suite.

Equivalente de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de nombres réels non nuls. Equivalent d'un produit, d'un quotient.
Si $u_n = \alpha_n + w_n$, où w_n est négligeable devant α_n, alors $u_n \sim \alpha_n$.

– Relations de comparaison des fonctions.
Etant donnés un point a (appartenant à I ou extrémité de I) et une fonction ϕ à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur I privé de a, définition d'une fonction f à valeurs réelles dominée par ϕ (négligeable devant ϕ) au voisinage de a.
Définition de l'équivalence au voisinage de a de deux fonctions f et g à valeurs réelles ne s'annulant pas sur I privé de a. Si $f = \phi + h$, où h est négligeable devant ϕ, alors $f \sim \phi$.
Application à la comparaison des fonctions usuelles.

5. Développements limités

– Développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point ; opérations algèbriques sur les développements limités ; somme, produit ; développement limité de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$, application au quotient.
Existence d'un développement limité à l'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: Formule de Taylor-Young.
Développement limité d'une primitive, d'une dérivée (démonstrations non exigibles).
Application à l'étude des points singuliers (ou stationnaires) des courbes paramétrées planes.

6. Méthodes d'approximation

– Calcul approché des zéros de fonction.
On considère ici des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Méthode de Newton et algorithme de Newton - Raphson.
Convergence dans le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f'' ne s'annule pas, si la valeur initiale x_o est telle que $f(x_o)\ f''(x_o) \geq 0$.
– Calcul approché d'une intégrale : Présentation d'un algorithme des trapèzes. Intérêt d'utiliser des subdivisions dichotomiques.
– Valeurs approchés de réels : Quelques algorithmes de calcul des nombres réels remarquables π, e, $\sqrt{2}$ etc.

Commentaires

- Nombres réels, suites et fonctions d'une variable réelle :
La notion de développement décimal illimité est hors programme.

Pour la présentation du cours, le programme se place dans le cadre des suites indexées par $\mathbb{N}$. On effectue ensuite une brève extension aux autres cas usuels.

Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.
Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel stritement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

La démonstration du théorème de limite monotone est hors programme.

Pour le théorème d'encadrement :
Si $|u_n| \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.
Si $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $v_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$. alors $u_n \to \ell$.
Si $v_n \leq u_n$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.

Suites adjacentes : cas particulier de la dichotomie.

Application à la divergence d'une suite bornée : il suffit d'exhiber deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.
La notion de valeur d'adhérence d'une suite est hors programme.

Notations pour les suites complexes : $Re(u_n)$, $Im(u_n)$, $\overline{u_n}$, $|u_n|$.

Toute suite complexe convergente est bornée.

la notion de continuité uniforme est hors programme.

Notations $\max\limits_{x\in I}(f(x))$ et $\max\limits_{I}(f)$.
Notations $\sup\limits_{x\in I}(f(x))$ et $\sup\limits_{I}(f)$.

Lorsque $a \in I$, dire que f a une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point.
Lorsque $a \notin I$, f a une limite finie en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point.
Les limites à gauche (ou à droite) en a sont définies par restriction de f à $I\cap]-\infty, a[$ (à $I\cap]a, +\infty[$.

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

Compatibilité de la notion de limite avec la relation d'ordre :
Si $|f(x)| \leq g(x)$ *et* $g(x) \to 0$*, alors* $f(x) \to 0$*.*
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$*, et si* $f(x) \to \ell$ *et* $h(x) \to \ell$*, alors* $g(x) \to \ell$*.*
Si $f(x) \leq g(x)$ *et* $f(x) \to +\infty$*, alors* $g(x) \to +\infty$*.*

Si f *et* g *sont continues,* $|f|$*,* $sup(f, g)$*,* $inf(f, g)$ *le sont.*

Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de la bijection réciproque.

Notations pour les fonctions complexes : $Re(f)$*,* $Im(f)$*,* $\overline{f}$*,* $|f|$*.*

Toute fonction complexe admettant une limite en un point est bornée au voisinage de ce point.

- Dérivation des fonctions à valeurs réelles :
Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et l'interprétation cinématique de la notion de dérivée en un point.
Notations : f'*,* Df*,* $\frac{df}{dx}$*.*
Notations : $f^{(k)}$*,* $D^k f$*,* $\frac{d^k f}{dx^k}$*.*
Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose f *continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$*. La démonstration du théorème de Rolle est hors programme.*

Voir le chapitre approximation, pour l'étude des suites définies par une relation de récurrence.

Brève extension au cas d'une limite infinie de la dérivabilité des prolongements continus.

Caractérisation des fonctions constantes.
Il convient de montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que le théorème de Rolle ne s'étend pas pour les fonctions complexes.

- Intégration et dérivation :
Pour introduire la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs positives, il convient de s'appuyer sur la notion d'aire. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur la notion d'aire.
Toue démonstration de l'intégralle d'une fonction continue par morceaux est hors programme.
Cas particulier de l'inégalité de la moyenne : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq (b - a) \sup_{[a,b]} |f|$*.*
Toute autre formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Pour la définition d'une primitive d'une fonction continue, il convient de montrer sur des exemples que cette définition ne peut être étendue sans changement au cas des fonctions continues par morceaux.
Pour toute fonction f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*,* $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$*.*
Pour la formule de changement de variable, il convient de mettre en valeur l'intérêt de changement de variables affines, notemment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrages du segment $[a, b]$*, au cas où l'intervalle d'intégration est* $[0, 1]$ *ou* $[-1, 1]$*.*

Pour le calcul des primitives des fonctions rationnelles, on se limitera à des exemples simples. Aucune théorie de décomposition en éléments simples n'est au programme.

Formule de Taylor avec reste intégral : relation $f(x) = T_p(x) + R_p(x)$*, où* $T_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(x)$*.*

- Calculs asymptotiques :
Notations de Landau : $u_n = O(\alpha_n)$*,* $u_n = o(\alpha_n)$*.*
Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{u_n}{\alpha_n}$*.*
Notation : $u_n \sim v_n$*.*
Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{u_n}{\alpha_n}$*.*

Si $u_n \sim v_n$*, alors, à partir d'un certain rang, le signe de* u_n *est égal à celui de* v_n*.*

Exemples simples de développements asymptotiques. Toute étude systématique est exclue ; en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

Notations : $f = O(\phi)$*,* $f = o(\phi)$*.*
Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{f}{\phi}$*.*
Notation : $f \sim g$*.*
Caractérisation à l'aide du quotient $\frac{f}{g}$*.*

Si $f \sim g$ *alors, au voisinage de* a*, le signe de* $f(x)$ *est égal à celui de* $g(x)$*.*

- Développements limités :
Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.

Les étudiants doivent connaître les développements limités des fonctions exponentielle, sinus et cosinus, sinus et cosinus hyperboliques ainsi que de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Méthodes d'approximation :
La méthode de dichotomie et la méthode d'approximations successives pourront être traitées en T.D.

On dégagera, sur des exemples, le caractère quadratique de la convergence.

On admettra que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, l'erreur est un $O(\frac{1}{n^2})$ où n est le nombre de points de subdivision.

IV - Espaces vectoriels de dimension finie et applications linéaires - Polynômes

Objectifs

En ce qui concerne les nombres entiers naturels et les ensembles finis, l'objectif principal est d'acquérir la maîtrise du raisonnement par récurrence. Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$ sont supposées connues ; toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.
L'objectif est double :
- acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance, linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie du plan et de l'espace (droites et plans).
- maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.

Il convient dans l'étude de l'algèbre linéaire de réinvestir la géométrie du plan et de l'espace étudiée en début d'année et d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.
La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur.

En ce qui concerne les polynômes l'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes, et les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algèbriques et les fonctions numériques.

En ce qui concerne la combinatoire, le programme se limite strictement aux exemples fondamentaux cités dans ce chapitre.
L'équipotence des ensembles infinis et la la notion d'ensemble dénombrale sont hors programme.

Pour les notions de groupe, d'anneau et de corps, le programme se limite strictement aux définitions indiquées ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie.

Le programme d'algèbre est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie.
En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place de calcul matriciel.

Le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.

1. Combinatoire élémentaire

– Nombres entiers naturels.
  Propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.
  Suites d'éléments d'un ensemble E (indexées par une partie de $\mathbb{N}$). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.
  Exemples d'utilisation des notations : $a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $a_1 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.
  Suites arithmétiques, géométriques. Notations : na et a^n.

– Ensembles finis.
Définition : il existe une bijection de $\{1, \cdots, n\}$ sur E ; cardinal (ou nombres d'éléments) d'un ensemble fini, notation $Card(E)$. On convient que l'ensemble vide est fini et que $Card(\varnothing) = 0$.
Toute partie E' d'un ensemble fini E est finie et $Card(E') \leq Card(E)$, avec égalité si, et seulement si, $E' = E$.
– Opérations sur les ensembles finis et dénombrement.
Si E et F sont des ensembles finis, $E \cap F$ l'est aussi ; cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes.
Si E et F sont des ensembles finies, $E \times F$ l'est aussi, et $Card(E \times F) = Card(E).Card(F)$.
Cardinal de l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F ; cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Cardinal de l'ensemble des bijections (permutations) de E.
Cardinal $\binom{n}{p}$ de l'ensemble des parties ayant p éléments d'un ensemble E à n éléments. Combinaison.
Relations $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ (triangle Pascal).
Interprétation ensembliste de ces relations.
Ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers, ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Relation d'ordre, valeur absolue.

2. Vocabulaire relatif aux structures algébriques et ensembles des nombres

– Groupe, groupe abélien, morphisme de groupes, isomorphisme de groupes, sous-groupe.
Goupe additif $\mathbb{Z}$ des nombres entiers. Multiplication dans $\mathbb{Z}$, propriétés.
– Anneau, anneau commutatif, sous-anneau, morphisme d'anneaux.
– Corps, corps commutatif.
– Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et Calcul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Multiples et diviseurs d'un entier, division euclidienne.
Définition des nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers.
Formule du binôme. Relation : $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k$.
Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

3. Espaces vectoriels, théorie de la dimension

– Espaces vectoriels et applications linéaires.
Définition d'un espace vectoriel, d'un sous-espace vectoriel, intersection de deux sous-espaces vectoriels, somme de deux sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires, notation : $E = E_1 \oplus E_2$.
Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F.
– Applications linéaires.
Définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d' endomorphisme.
Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaire de E dans F.
Composée de deux applications linéaires, réciproque d'une application linéaire bijective, Définition d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Définition du groupe linéaire $GL(E)$.
Équations linéaire, noyau et image d'une application linéaire. Ensemble des solutions de $u(x) = b$.
Caractérisation des projections par la relation $p^2 = p$.
Caractérisation des symétries par la relation $s^2 = Id_E$.
– Dimensions des sous-espaces vectoriels.
Familles de vecteurs, combinaison linéaire de p vecteurs d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Sous-espace espace engendré par une famille finie de vecteurs.
Famille génératrice, famille liée, famille libre. Base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Etant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \cdots, e_p)$ et une famille $(f_1, \cdots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_i) = f_i$.
– Dimension d'un espace vectoriel.
Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie).
Théorème de la base incomplète, existence de bases.
Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle.
Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si, et seulement si, $dim(E) = dim(F)$.
Etant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_i)$ et un espace vectoriel F muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.

– Dimension d'un sous-espace vectoriel.
Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $dim(E') \leq dim(E)$, avec égalité si, et seulement si, $E' = E$.
Rang d'une famille de vecteurs.
Existence de dimension d'un sous-espace vectoriel, sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel donné.
– Rang d'une application linéaire.
Etant donnée une application linéaire u de E dans F, u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $Ker(u)$ sur $Im(u)$; en particulier, $dim(E) = dim(Ker(u)) + dim(Im(u))$.
Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes. Caractérisation des éléments inversibles.

4. Calcul matriciel, systèmes linéaires

– Opérations sur les matrices.
Espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $I\!\!K$, espace vectoriel $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$ des matrices carrées à n lignes. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$. Isomorphismes canoniques de $\mathcal{L}(I\!\!K^p, I\!\!K^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$, isomorphismes canoniques de $\mathcal{L}(I\!\!K^n)$ sur $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$. Définition du produit matriciel, bilinéarité.
Matrices carrées inversibles, définition du groupe linéaire $GL_n(I\!\!K)$.
Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algèbriques sur les matrices.
Matrices diagonales, triangulaires supérieures (ou inférieures).
Matrices carrées symétriques, antisymétriques.
– Matrices et applications linéaires.
Matrice $\mathcal{M}_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base B dans un espace vectoriel F muni d'une base C. L'application $u \mapsto \mathcal{M}_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$; dimension de $\mathcal{L}(E)$.
Matrice $\mathcal{M}_B(u)$ associée à un endomorphisme u de E muni d'une base B. L'application $u \mapsto \mathcal{M}_B(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$; dimension de $\mathcal{L}(E)$.
Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires.
Matrice de passage d'une base B à une base B' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme. Matrices carrées semblables (la notion de matrices équivalentes est hors programme).
Cas où le changement de base résulte d'une rotation vectorielle en dimension 2 ou 3.
– Rang d'une matrice.
Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).
Invariance du rang par transposition.
– Systèmes d'équations linéaires.
Définition, système homogène ; interprétations. Description de l'ensemble des solutions.
Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.
Existence et unicité de la solution lorsque le système est de Cramer.
Résolution d'un système échelonné. Exemples d'utilisation de la méthode du pivot de Gauss.
– Déterminants d'ordres 2 et 3.
Déterminant de deux vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2, de trois vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Caractérisation des bases.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer à deux ou trois inconnues.
Déterminant d'un endomorphisme, de composée de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'un matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices.

5. Polynômes et fractions rationnelles

– Polynômes à une indéterminée.
Ensemble $I\!\!K[X]$, opérations, degré d'un polynôme, degré d'un produit, d'une somme, coefficient dominant.
Espace vectoriel $I\!\!K_p[X]$.
Multiples et diviseurs d'un polynôme.
Division euclidienne dans $I\!\!K[X]$, algorithme de la division euclidienne.
– Fonctions polynomiales :
Fonction polynomiale associée à un polynôme, Zéros (ou racine) d'un polynôme, ordre de multiplicité.
– Polynômes dérivés.
Définition, linéarité de la dérivation, caractérisation par la valeur des dérivés successifs en un point a, de l'ordre de multiplicité de la racine a. Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.
– Polynômes scindés.
Définition, somme et produit des racines d'un polynôme scindé. Polynômes irréductibles, théorème de d'Alembert-

Gauss des polynômes irréductibles, décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

– Fractions rationnelles.
  Définition d'une fraction rationnelle, d'une fonction rationnelle.
  La décomposition en éléments simples des fractions suivantes : $\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)}$, $\frac{P(X)}{(X-a_i)^p}$ et $\frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)^{p_i}}$, où les a_i sont distincts deux à deux et le degré de numérateur est inférieur strictement au degré de dénominateur.

Commentaires

- Combinatoire élémentaire :
Symbole $n!$ (on convient que $0! = 1$).

On admet que s'il existe une bijection de $\{1, \cdots, p\}$ sur $\{1, \cdots, n\}$, alors $p = n$.
Etant donnés deux ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, f est bijective si, et seulement si, f est surjective ou injective.
Une partie non vide P de $\mathbb{N}$ est finie si, et seulement si, elle est majorée. Si P est finie non vide, il existe une bijection strictement coissante et une seule de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ sur P, où $n = Card(P)$.

Les étudiants doivent connaître la relation : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

Les constructions de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Q}$ sont hors programme.

- Vocabulaire relatif aux structures algébriques et ensembles des nombres :
Il s'agit ici de donner uniquement les définitions et des exemples simples.
Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus :
. des ensembles de nombres, notamment $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
. de l'algèbre linéaire et de la géométrie.

La démonstration de l'existence et de l'unicié de la décomposition en facteurs premiers est hors programme.

On généralisera en cours d'année au cas d'éléments qui commutent dans les anneaux des matrices ou d'endomorphismes.

- Espaces vectoriels, théorie de la dimension :
En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Exemples d'espaces vectoriels : espace $\mathbb{K}^n$, espaces vectoriels de suites ou de fonctions.
la notion générale de somme directe est hors programme. On se limitera à la somme directe de deux sous-espaces.

Etude des applications linéaires : homothéties, projections et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.
Exemples d'applications linéaires en analyse, en géométrie.

L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

Déscription de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Le cas des familles indexées par un ensemble est hors programme.

En particulier, la donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, \cdots, x_p)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E détermine une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrises, des familles libres.

Etant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
. Si S est libre, alors $p \leq n$, avec égalité si, et seulement si, S est une base ;
. Si S est génératrice, alors $p \geq n$, avec égalité si, et seulement si, S est une base.

Etant donnée une forme linéaire ϕ sur E, expression de $\phi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

Les étudiants doivent connaître la relation : $dim(E + F) = dim(E) + dim(F) - dim(E \cap F)$. (Démonstration est hors programme).

Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan.

- Calcul matriciel, systèmes linéaires :
Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$.
Ecriture matricielle $Y = MX$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces supplémentaires.

La j-ème colonne de $\mathcal{M}_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base C de l'image par u du j-ìeme vecteur de la base B.

La matrice de passage de la base B à la base B' est, par définition, la matrice de la famille B' dans la base B : sa j-ìeme colonne est constituée des coordonnées dans la base B du j-ìeme vecteur de la base B'. Cette matrice est aussi $M_{B,B'}(I_E)$.

Pour toute application linéaire u de E dans F, $rg(u) = rg(M_{B,C}(u))$, où B est une base de E et C une base de F. (Démonstration hors programme).

Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues, à l'aide des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, des formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$, et d'une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ (ainsi que la traduction matricielle correspondante).

Le théorème de Rouché-Fontenét les matrices bordantes sont hors programme.

Systèmes de Cramer : les principes objectifs sont l'étude de l'indépendane linéaire et de petits systèmes de Cramer, et les applications géométriques.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, application à l'orientation du plan, de l'espace ; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes du plan ou de l'espace orienté. Produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Calcul du déterminant d'une matrice par développement selon les éléments d'une rangée.

- Polynômes et fractions rationnelles :
Aucune connaissance sur la construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est exigible des étudiants.

Notions de pgcd, ppcm et des polynômes premiers entre eux sont hors programme.
La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Exemples de recherche de polynômes satisfaisant à des conditions données (interpolation, équations différentielles ...).

La démonstration de la décomposition en éléments simples des trois fractions rationnelles $\dfrac{P(X)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)}$, $\frac{P(X)}{(X-a_i)^p}$ et $\dfrac{P(X)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)^{p_i}}$ est hors programme.
D'autres fractions pourront être traitées sur des exemples.
Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en élément simple sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, en dehors des trois montionnées au paragraphe des fractions rationnelles, n'est exigible des étudiants.

Activités algorithmiques

- Exemples d'algorithmes calculant $f(x)$; où f est une fonction réelle de la variable réelle.
  (i) Cas d'une fonction donnée par son expression à l'aide des fonctions usuelles.
  (ii) Calcul de x^n ; exponentiation rapide.
  (iii) Cas des polynômes : schéma de Hörner.

- Algorithmes pour les équations différentielles.
  (i) Algorithmes de résolution directe pour le premier ordre et le second ordre à coefficients constants.
  (i) Schéma d'Euler pour la résolution numérique.

- Algorithme de calcul du centre de gravité de n points du plan ou de l'espace.

- Algorithme de calcul numérique de $\sqrt{a}$.
  Schéma de héron : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$.

- Algorithmes pour la résolution numérique de l'équation $f(x) = 0$: méthode de Newton, de dichotomie et méthode d'approximations successives.

-Algorithme pour le calcule numérique de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$: méthode des réctangles et méthode des trapèzes.

- Algorithmes pour le calcul des sommes et produits finis.

- Algorithme de la décomposition en facteurs premiers.

- Méthode de pivot de Gauss pour le calcul du rang ou la résolution d'un système linéaire ou le calcul de l'inverse d'une matrice inversible.