Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer lorsque cela est possible A_m^{-1}.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible déterminer le noyau et l'image de A_m.

Exercice 2 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est valeur propre de $g \circ f$ alors λ est valeur propre de $f \circ g$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

Exercice 3

1. Soient f et g deux endomorphisme s d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ayant chacun n valeurs propres distinctes dans K. Montrer que
$$f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes valeurs propres.}$$
2. Supposons maintenant que $K = \mathbb{C}$ et que $f \circ g = g \circ f$. Si u est un endomorphisme on dit qu'un espace vectoriel F est $u-$stable si $u(F) \subset F$. Montrer que tout sous-espace propre de f est $g-$stable.
Remarque : On peut montrer par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à $f$et g. On admettra ce résultat.
3. Considérons f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   - Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ et déterminer les sous-espaces propres de M et N.
   - Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de f et g sont diagonales.

Exercice 4 Soient $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. avec : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A.

1. *Uniquement* en examinant la matrice A, trouver deux valeurs propres et un vecteur propre de A, puis deux sous-espaces $f-$stables.
2. Que représente la matrice B ?

Exercice 5 Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 6 Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On suppose que v admet n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe une base de E, formée de vecteurs propres communs à u et à v.
En déduire qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = a_0 \mathrm{id} + a_1 v + \cdots + a_{n-1} v^{n-1}$

Exercice 7 On considère les matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ En effectuant le moins de calculs possible,

1. montrer que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}A \subset \mathrm{Ker}A^2 \subset \mathrm{Ker}A^3 = \mathbb{R}^4$
et déterminer les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^2$,
2. déterminer un vecteur e_1 tel que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}A^2 \oplus \mathrm{Vect}(e_1)$,
3. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1) est une famille libre,
4. montrer que $Ae_1 \in \mathrm{Ker}A^2$, et que $\mathrm{Ker}A^2 = \mathrm{Ker}A \oplus \mathrm{Vect}(Ae_1)$,
5. montrer que $A^2e_1 \in \mathrm{Ker}A$ et déterminer un vecteur e_2 tel que $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Vect}(A^2e_1) \oplus \mathrm{Vect}(e_2)$,

6. montrer que (e_1, Ae_1, A^2e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (A^2e_1, Ae_1, e_1, e_2). Caluler $P^{-1}AP$.

Adapter ce travail à l'étude de B et C

Exercice 8 Soit J la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer leurs multiplicités.
3. Donner le polynôme caractéristique de J.

Exercice 9 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$AB - BA = A$$

Le but de cet exercice est de montrer que A est nilpotente, c'est à dire

$$\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0.$$

On note E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application :

$$\psi \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & MB - BM \end{array}$$

1. Montrer que ψ est linéaire de E dans E.
2. Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$.
3. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.
4. Conclure.

Exercice 10 Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer χ_M, le polynôme caractéristique de M.
2. Verifier que $\chi_M(M) = O$
3. En déduire l'inverse de M

Exercice 11 On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2(nX+a)P \end{array}$$

Vérifier que cette application est bien définie.
Déterminer ses valeurs propres, et les espaces propres associés.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Com} = \{v \in \mathcal{L}(E,E)/uv = vu\}$ des endomorphismes de E qui commutent avec u est un espace vectoriel.
2. (a) Soit v un élément de Com. Montrer que v préserve les espaces propres de u (c'est à dire que si E_λ est un espace propre de u associé à la valeur propre λ, on a $\forall x \in E_\lambda, v(x) \in E_\lambda$).
   (b) Donner la dimension des espaces propres de u et montrer que si x est un vecteur propre de u alors c'est aussi un vecteur propre de v.
   (c) A l'aide d'une base convenablement choisie, décrire tous les éléments de Com, et montrer que Com est de dimension n.
3. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1}) \subset \mathrm{Com}$.
4. Montrer que la famille $\{\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1}\}$ est libre et que : $\mathrm{Com} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2, ..., u^{n-1})$.