Exercice 1 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $n = 2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si n est pair.

Exercice 2 Inverser les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que leurs produits.

Exercice 3 Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$ sans le développer.

Exercice 4 Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in M_n(\mathbb{R})$ est dite triangulaire supérieure lorsque pour tout $i > j$: $a_{ij} = 0$.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
2. Démontrer que $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.
3. Soit E un espace vectoriel, $\varepsilon = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On note E_i l'espace vectoriel engendré par $\{e_1, \ldots, e_i\}$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $\mathrm{Mat}(\varphi, \varepsilon)$ est triangulaire supérieure si et seulement si $\varphi(E_i) \subset E_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. Démontrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 5 On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = I + N.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $\det(A^n)$.
2. Calculer N^2 et N^3.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner le rang de N^n et celui de A^n.
4. En utilisant 1., donner, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de la matrice $M(n) = A^n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la formule $(A^n)^{-1} = M(-n)$. Expliquer et justifier l'écriture : $A^n = M(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 Soit S la matrice 5×5 à coefficients réels : $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer det (S). Déterminer (de préférence sans calcul) S^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^5$ de dimension respective 2 et 3 tels que : $\mathbb{R}^5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $S(E_1) \subset E_1$ $S(E_2) \subset E_2$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E_2$ tels que $Sx = x$. En déduire que la décomposition qui précéde n'est pas unique.

Exercice 7 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in M_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 Montrer que si $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, A \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(\mathrm{Com}(A)) = (\det(A))^{n-1}.$$

Exercice 9 Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n;$$

$$\mathrm{rg}(A) = n - 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1;$$

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n - 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0.$$

Exercice 10 Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{1, ..., n\}, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1, \\ \forall (i, j) &\in \{1, ..., n\}^2, a_{i,j} \in [0, 1[. \end{aligned}$$

Montrer que $|\det(A)| < 1$.