Exercice 1 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Sans calcul, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 4 Soit $\Delta(x) = \det(a_{i,j}(x))$ de taille $n = 2$ ou 3 avec $a_{i,j}$ des fonctions dérivables.

1. Montrer que $\Delta'(x)$ est la somme des n déterminants obtenus en remplaçant successivement dans $\Delta(x)$ chaque colonne par sa dérivée.
2. Calculer $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$.

Exercice 5 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

Exercice 6 La famille $(2,1,0)$, $(1,3,1)$, $(5,2,1)$ est-elle libre ?

Exercice 7 Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 8 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 1 & \sin y & \cos y \\ 1 & \sin z & \cos z \end{vmatrix}$

Exercice 9 Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième composante est égale à 1 et toutes les autres sont nulles. Écrire la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes C_i sont donnés par $C_i = e_i + e_n$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $C_n = e_1 + e_2 + e_n$. Calculer alors son déterminant.

Exercice 10 On note a, b, c des réels. Calculer les déterminants suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Généraliser le calcul de D_2 à un déterminant $n \times n$ du même type.

Exercice 11 On note $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Calculer les déterminants $n \times n$ suivants.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 12 Montrer que

$$\begin{vmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sin(c-b) + \sin(b-a) + \sin(a-c) = 4 \sin\frac{c-b}{2} \sin\frac{b-a}{2} \sin\frac{a-c}{2}$$

Exercice 13 Soient a, b deux réels distincts. Calculer le déterminant suivant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 14 Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Calculer alors, suivant la valeur du paramètre m, le rang de cette matrice.

Exercice 15 Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 3 & 1 & \ddots & \\ -4 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

en fonction de n. (vérifier que -1 est racine de $X^3 - 3X^2 + 4$)

Exercice 16 Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Exercice 17 Soit $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note A_n le déterminant suivant :

$$A_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & a & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ y & & & a \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3,\ A_n = aA_{n-1} - xya^{n-2}$. En déduire une expression de A_n en fonction de n, a, x et y.

Exercice 18 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Exercice 19 On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \qquad (\star)$$

1. Déterminer toutes les suites complexes satisfaisant la relation $(\star)$.
2. Déterminer toutes les suites réelles satisfaisant la relation $(\star)$.
   On considère maintenant le déterminant d'ordre n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$$

3. Calculer Δ_{n+2} en fonction de Δ_{n+1} et Δ_n pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose $\Delta_0 = 1$).
   En déduire la valeur de Δ_n en fonction de n.

Exercice 20 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 21 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Exercice 22 Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant $\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix}$ est divisible par 17.

Exercice 23 Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & c & c & b\\ c & a & b & c\\ c & b & a & c\\ b & c & c & a\end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c & a & b & c\\ a & c & c & b\\ b & c & c & a\\ c & b & a & c\end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & a & 0 & b\\ c & 0 & d & 0\\ 0 & c & 0 & d\end{vmatrix}$$

Exercice 24 Pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on note $A_{(a_0 \dots a_n)}$ la matrice

$$A_{(a_0 \dots a_{n-1})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0\\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

et à $\lambda \in \mathbb{R}$, on associe $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda) = \det(A_{(a_0, \dots, a_{n-1})} - \lambda \mathrm{id})$. Calculer $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ en fonction de $\Delta_{(a_1 \dots a_{n-1})}(\lambda)$ et a_0. En déduire $\Delta_{(a_0 \dots a_{n-1})}(\lambda)$.

Exercice 25 Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}\\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p & q & & \text{\Large 0}\\ 1 & p & \ddots & \\ \text{\Large 0} & \ddots & \ddots & q\\ & & 1 & p\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & 1\\ 1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & 1 & 1\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a\\ a & a+b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & \cdots & a & a+b\end{vmatrix}$$

Exercice 26 Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ -a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35}\\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{45}\\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0\end{vmatrix}$$

Comment généraliser ce résultat en dimension plus grande ?

Exercice 27 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \cos x & \cos y & \cos z & \cos t\\ \cos 2x & \cos 2y & \cos 2z & \cos 2t\\ \cos 3x & \cos 3y & \cos 3z & \cos 3t\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & & n\\ -1 & -2 & 0 & & n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \cdots\\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 2\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1\\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Exercice 28 Soit $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n(a_0, ..., a_n, x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & a_0\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ & \ddots & -x & a_{n-2}\\ 0 & & 1 & a_{n-1} - x\end{vmatrix}$$

Exercice 29 Soit $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_1\end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 30 Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \quad \Delta_n = a^{n-2}\left(a^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)$

Exercice 31 Soit a un réel différent de 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+a^2 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Calculer D_n en foncion de D_{n-1} et D_{n-2}. Monter que $D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}$. Combien vaut D_n si $a = 1$?

Exercice 32 Soient a, b, c trois réels et Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (n+1)\,\frac{a^n}{2^n}$$

Exercice 33 Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$

Exercice 34 Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ (avec la convention $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 3$).
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = 2^{n+1} - 1$

Exercice 35 Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.