EXERCICE 1

Chercher si les intégrales suivantes convergent ou non :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{(1-t)^2} dt \quad , \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}} - 1}{t} dt \quad , \quad K = \int_0^1 \frac{1}{\arccos(1-t)} dt$$

EXERCICE 2

1. Etudier la nature des intégrales suivantes :
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx. \quad , \quad \int_1^{\infty} x^x dx. \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)} dx.$$
2. Etudier la nature des intégrales suivantes puis calculer leur valeur en cas de convergence :
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx. \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx. \quad , \quad \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx. \quad , \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{\sinh} t dt.$$

EXERCICE 3

Montrer que les intégrales suivantes convergent et calculer leur valeurs :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt$

EXERCICE 4

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Etudier , suivant les valeurs de α, β et γ la nature de l'intégrale généralisée : $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^{\alpha}\left(\frac{1}{t}\right)}{t^{\beta}(1-t)^{\gamma}}$

EXERCICE 5

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.
   (a) Verifier que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$
   (b) Exprimer W_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
   (c) Prouver que $W_n \simeq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
2. (a) Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leq x$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0, n]$ $(1 - \dfrac{x}{n})^n \leq e^{-x} \leq (1 + \dfrac{x}{n})^{-n}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt$.
   (d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ existe et vaut W_{2n-2}.
   (e) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

EXERCICE 6

Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que si f admet une limite ℓ en $+\infty$, alors F a aussi la limite ℓ en $+\infty$.
2. Donner un exemple où f n'a pas de limite en $+\infty$ mais où F tend vers 0.
3. Montrer que si $f \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, alors $F \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

EXERCICE 7

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ décroissante, on pose :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t) dt.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge.
2. Montrer que la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ a une limite quand $n \to +\infty$ si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge, et que dans ce cas :
$$\int_{n+1}^{+\infty} f \leq \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{m} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f.$$
3. Montrer que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge on a : $S_n \backsim \displaystyle\int_1^n f$ quand $n \to +\infty$.