EXERCICE 1
Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0$ $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

EXERCICE 2
Calculer les primitives suivantes :

$$\int e^x \cos x dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x^n} dx \; n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \int x \text{Arctan}\, x dx \quad ; \quad \int (x^2+x+1)e^x dx.$$

EXERCICE 3
Soit $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

EXERCICE 4
Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
4. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5. Calculer nI_nI_{n+1}.
6. Donner alors un équivalent simple de I_n.

EXERCICE 5
Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k})$.

EXERCICE 6
En utilisant des relations de récurrence , calculer :

1. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\cos^n u}$.
2. $J_n = \int_1^e \log(u)^n du$.

EXERCICE 7
Déterminer les fonctions f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$$

.

EXERCICE 8
Soient $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$.
2. Montrer que ceci est encore vrai si f est en escalier.
3. En déduire que le résultat subsiste pour f continue par morceaux.

EXERCICE 9
Soient $0 < a \leq b$. Montrer que $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

EXERCICE 10
Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

EXERCICE 11
Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.