Lycée Alkhawarizmi, 2EMME TSI 03 SERIE NO 02

Exercice 1:

1. Montrer que si deux normes de $\mathbb{R}^d$ ont les mêmes boules unités fermées alors ces deux normes sont égales
2. Montrer que si deux normes de $\mathbb{R}^d$ ont les mêmes boules unités ouvertes alors ces deux normes sont égales
3. Montrer que si deux normes de $\mathbb{R}^d$ ont les mêmes sphères unités fermées alors ces deux normes sont égales

Exercice 2:

dire si la suite (u_n) converge ou diverge dans les cas suivants et determiner sa limite en cas de convergence

1. dans $\mathbb{R}^2$, $u_n = \left(n, \frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $u_n = \left(n^4 e^{-n}, \frac{3n^2+1}{5n^2-1}, \frac{\sin n + 3\cos n^2}{-7n+2}\right)$

Exercice 3:

Soit $(a, q) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = q u_n$$

1. Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (u_n) converge et calculer sa limite
3. On considère la suite (S_n) tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$$

Etudier la convergence de la suite (S_n)

Exercice 4:

Soit $(a, r) \in (\mathbb{R}^d)^2$ et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = u_n + r$$

1. Donner une expression simple de u_n en fonction de n, r et a.
2. Etudier la convergence de la suite (u_n)
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$. Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

Exercice 5:

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha = \sup(A)$. Prouver que α est un point adhérent de A
2. Donner un résultat similaire au cas où A est non vide minorée
3. Montrer que si A est une partie non vide fermée et majorée de $\mathbb{R}$ alors A admet un plus grand élément. Donner un résultat similaire pour les parties non vides minorées et fermées de $\mathbb{R}$

Exercice 6:

On considère une suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et on suppose que (u_n) converge de limite $\ell \in \mathbb{R}^d$. Soit $V = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ et $F = V \cup \{\ell\}$

1. Prouver que F est un fermé de $\mathbb{R}^d$
2. Est il possible que $\ell \in V$? Si oui donner un exemple
3. Comment se comporte la suite (u_n) au cas où $\ell \in V$?