Exercice 1:
Soit N une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+$.Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}$ si seulemnt s'il existe un nombre réel strictement positif α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N(x) = \alpha|x|.$$

Exercice 2:

1. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}^d$ alors il en est de même de $N_1 + N_2$. Généraliser
2. Montrer que si N est une norme sur $\mathbb{R}^d$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors λN est une norme sur $\mathbb{R}^d$
3. Dessiner en le justifiant la boule ouverte unité associée à la norme $N = ||.||_1 + ||.||_\infty$

Exercice 3:

1. Pour tout $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :$||X|| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x + ty|}{1 + t^2}$. Prouver que $||.||$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
2. Pour quelles valeurs du nombre réel λ la relation : $N_\lambda(X) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$, pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, définit- elle une norme N_λ sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 4:

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ tel que f est bijectif et $||.||$ une norme de $\mathbb{R}^d$. Prouver que $N(x) = ||f(x)||$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ définit une norme sur $\mathbb{R}^d$.
2. Application : sous-quelle condition sur les nombres réels a, b, c et d la relation : $N(X) = \sqrt{(ax + cy)^2 + (bx + dy)^2}$ avec $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ définit elle une norme N sur $\mathbb{R}^2$?
3. Montrer que la relation : $||X|| = \sqrt{(x + y)^2 + (x - 2y)^2}$ pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et representer soigneusement la boule unité fermée associée à cette norme .

Exercice 5:
Montrer que , dans $\mathbb{R}^2$, la partie A est un ouvert dans les cas suivants :

1. $A =]0, 1[\times]0, 3[$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 2\}$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

Exercice 6:

1. Montrer que les parties suivantes sont des ouverts de $\mathbb{R}$: $]0, 1[$, $]0, 1[\cup]5, +\infty[$
2. Montrer que $F = \{(t, \sin t)/t \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$
3. Montrer que l'intervalle $]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$
4. Montrer que $W = \left\{\dfrac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$

Exercice 7:
Pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A.

1. Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on a :
   (a) $\overline{A}$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$
   (b) $A \subset \overline{A}$
2. Montrer que si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^d$ alors on a : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
3. On suppose dans cette question que $d = 1$ et soit $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1]$. Comparer $\overline{A}$ et $\overline{B}$. Qu'en déduisez vous pour ce qui est de l'implication réciproque de la question 2) ?
4. Montrer que pour toute partie F de $\mathbb{R}^d$, on a : F est fermée si et seulement si $F = \overline{F}$. En déduire que pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on a : $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$